Zahlvorstellung und Operieren am mentalen Zahlenstrahl

Eine Untersuchung im mathematischen Anfangsunterricht zu computergestützten Eigenkonstruktionen mit Hilfe einer LOGO-Umgebung.

Dissertation

zur Erlangung des Grades eines Doktors

der Erziehungswissenschaften (Dr. paed.)

der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg

vorgelegt von Dieter Klaudt aus Ilshofen

Ludwigsburg

2005

Erstgutachter: Prof. Herbert Löthe

Pädagogische Hochschule Ludwigsburg

Zweitgutachterin: Prof'in Dr. Silvia Wessolowski

Pädagogische Hochschule Ludwigsburg

Datum des Abschlusses der mündlichen Prüfung: 02.12.2005

Inhaltsverzeichnis

Erklärung der Textauszeichnungen und Rahmen:

' Dies ist ein Zitat'	Wörtliches Zitat
[LORENZ 2004, 144].	[Autor Jahr, Seite] (siehe 6.3 Bibliographie)
MSWLogo	WWW-Quelle (siehe 6.4 WWW-Links)
$\mathbf{N}_0$	Mengenbezeichner
/LOGOLIB/ZSTRAHL.LG	Datei oder Verzeichnisname
`wh 4 [vw 50 re 90]`	Ausführbare(s) Logoprogramm/Logobefehle
print 'Hallo 123!'	Ausführbare(s) Pythonprogramm/Pythonbefehle
(Anlagen A1, A3, B4)	Verweis auf Anlagen (siehe 7. Anhang)
	Rahmen für Bilder
	Rahmen für Monitorabzug
▾ *Text*	Markierung für Zusammenfassungen bei der Datenauswertung

Einleitung

Ziele der Arbeit

In der psychologischen und mathematikdidaktischen Forschung wird versucht, ein immer genaueres Bild vom Mathematiklernen der Kinder im Anfangsunterricht zu erhalten. Diese Anstrengungen werden unternommen um damit den Mathematikunterricht zu verbessern, individuellere Lernangebote zu organisieren und vor allem auch, um Störungen und Defizite im Lernprozess zu erkennen und dann frühzeitig entsprechende Fördermaßnahmen ergreifen zu können.

Nachdem in den letzten Jahren hauptsächlich Einzelfallstudien gemacht wurden, um qualitiative Daten über individuelle Prozesse beim Mathematiklernen zu erhalten, werden nun, unter anderem auch ausgelöst durch die PISA-Studie, in größeren Populationen nicht nur quantitiative Untersuchungen sondern auch solche qualitativer Art gemacht.

Die Arbeit versucht, entsprechenden Fragestellungen in einem kleinen Bereich, dem Aufbau des mentalen Zahlenstrahls während des ersten Schuljahres, nachzugehen. Dazu wurden im Rahmen eines, durch die Pädagogische Hochschule Ludwigsburg geförderten, dreijährigen Forschungsprojektes (CEKA: Computerunterstützte Eigenkonstruktionen von Kindern im mathematischen Anfangsunterricht) an verschiedenen Grundschulen computerunterstützt quantitative und qualitative Daten erhoben.

Aufbau der Arbeit

Aus diesen Vorbemerkungen ergibt sich die Gliederung der Arbeit in fünf Teile. In einem ersten theoretischen Teil wird der mathematisch-fachdidaktische Kontext dargestellt. Begriffe werden geklärt und abgegrenzt und verschiedene Modelle der Entwicklung des Zahlbegriffs und von Zahlvorstellung (number sense) werden sowohl aus mathematikdidaktischer wie auch aus psychologischer Sicht beschrieben.

Die Computerumgebung, in der die Daten erhoben wurden, sowie die dabei verwendeten Metaphern und initiierten mentalen Modelle werden im zweiten Teil dargestellt. Hier wird außerdem versucht, alternative Ideen zum Mathematikunterricht unter Nutzung der neuen Medien, der Computersprache LOGO und der Idee des Lernens in Mikrowelten aufzuzeigen.

In den folgenden beiden Kapiteln wird die empirische Studie mit ihren einzelnen Teiluntersuchungen dargestellt. Dieser Teil beginnt mit den

Forschungsfragen, anschließend wird der Ablauf der Studie kurz beschrieben. Die Darstellung der Methoden sowie die Darstellung der mathematischen Leistungstests, der Einführungsstunden und der Auswertung der Computerprotokolle zeigen den Umfang der Untersuchung. Mittels statistischer Analysen und mittels Interkorrelationen wird versucht, Zusammenhänge bei der Entstehung elaborierter Zahlvorstellungen in den Daten aufzuzeigen. Individuelle Entwicklungsverläufe bei der Anwendung unterschiedlicher Strategien in den Computermikrowelten werden in Einzelfallanalysen präsentiert.

Im abschließenden Kapitel wird eine Zusammenschau der vorliegenden Ergebnisse versucht. Die Daten der Computererhebung werden mit Daten aus mathematischen Standardtests verglichen und es wird kurz dargestellt, ob es Geschlechtsspezifika bei der Entwicklung mathematischer Fähigkeiten und bei den Strategien am mentalen Zahlenstrahl gibt. Eine Diskussion des so entstehenden Gesamtbildes und ein Ausblick auf mögliche Folgerungen für weitere Forschungen und für den Eingangsunterricht in Mathematik schließen die Arbeit ab.

1 Zahlvorstellung und mentaler Zahlenstrahl

In vielen Untersuchungen der 80er und 90er Jahre wurden die Zahl- und Ziffernkenntnisse von Vorschulkindern und Schulanfängern erforscht. Dabei konnte nicht nur gezeigt werden, dass die Kinder ein großes Vorwissen in die Schule mitbringen (siehe: [Schmidt/Weiser 1982], [Hengartner/Röthlisberger 1994], [Grassmann 1995a], [Heuvel-Panhuizen 1996], [Moser Opitz 2001], [Hasemann 2001]), sondern auch, wie ein Vergleich der vorliegenden Arbeiten zeigt, dass dieses mathematische Vorwissen im Laufe der Zeit durchschnittlich zugenommen hat. Weiter wird aber auch deutlich, dass es große individuelle Unterschiede im Vorwissen gibt und dass diese Differenzen in den letzten Jahren eher größer als kleiner geworden sind. Offen bleibt allerdings immer die Frage: Wie hat sich dieses individuelle Wissen über Zahlen und deren Gebrauch genau entwickelt?

Lorenz [1993a , 122f.] beschreibt *'Davids Zahlenstrahl, der von Stunde zu Stunde, 'Spiel zu Spiel' sich änderte.'* Ein ähnliches Bild zeigt der Zahlenstrahl von Pia, den sie nach acht Wochen Mathematikunterricht anfertigen sollte.

Zeichne die Zahlen 12, 5, 7, 3, 8, 4 auf dem Strich ein!

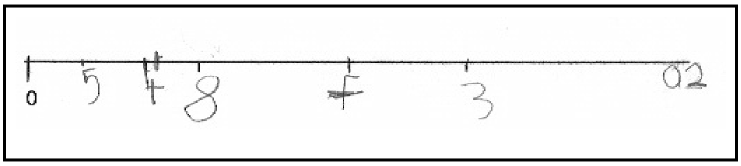


Abb. 1.01: Pias Zahlenstrahl

Ist solch ein Anschauungsbild *unmathematisch*, wie Lorenz feststellt, oder ist es überhaupt keine Zahlenstrahldarstellung, weil Pia hier ihr Wissen über Zahlen vielleicht in einem unpassenden, nicht verstandenen Kontext darstellen musste? Wann beginnt ein Zahlenstrahl überhaupt mathematisch zu sein?

Weiter wird beschrieben, dass Schüler auf der Basis von Handlungen arithmetische Vorstellungsbilder entwickeln, *'…sie sollen einen Zahlenraum entwickeln, in dem sie sich bewegen können. Durch didaktische Schritte werden die Vorstellungsbilder ausgebildet: sie werden zu Prototypen. Die Bildung der Anschauungsbilder muß eingeleitet und kontrolliert werden'* [Lorenz 1993a, 144]. Offen bleibt auch hier, wie der Aufbau dieser individuellen mentalen Vorstellungsbilder vor sich geht.

LORENZ [2002, 24] weist auch darauf hin, dass bei manchen Kindern '… *bestimmte kognitive Faktoren, die für das Zahlverständnis und das Rechnen notwendig sind, noch nicht hinreichend für die schulischen Anforderungen ausgebildet'* seien. Diese kognitiven Faktoren kann man beschreiben (siehe unten 1.3), aber über den Ausbildungsprozess dieser Faktoren selbst gibt es nur vage Vorstellungen.

Auch PADBERG [1992, 10] weist auf dieses Dilemma hin, wenn er schreibt: *'Wie sich im einzelnen allerdings die Konstruktion und die Verzahnung der verschiedenen Zahlaspekte bei der Zahlbegriffsentwicklung bei Kindern vollzieht, dazu gibt es … wesentlich mehr offene Fragen als konkrete Ergebnisse.'*

Damit ist die Fragestellung zunächst einmal grob umrissen. Es geht darum, bestimmte Faktoren zu benennen, die nötig sind, um mit Zahlen umgehen zu können. Dies kann einerseits aus der Sicht der Anforderungen der Mathematikdidaktik, wie bei PADBERG, aber andererseits auch aus der Blickrichtung des Individuums Kind, das einen entsprechenden Entwicklungsprozess durchlaufen muss, wie bei LORENZ angedeutet, geschehen. Die offenen Fragen, die PADBERG anspricht, kann sicher nicht die Mathematik als Fachwissenschaft und auch nicht allein die Mathematikdidaktik klären, da es sich dabei um mentale Prozesse und Abstraktionen handelt, die vorrangiges Forschungsziel der Psychologie sind. Weiter wird schon in den wenigen Zitaten deutlich, dass zunächst einmal eine Klärung der Begriffe, die in diesem Kontext immer wieder auftauchen, wie z.B.: Zahlaspekte, Zahlbegriffsentwicklung, Zahlverständnis, arithmetische Vorstellungsbilder usw. vorzunehmen ist.

1.1 Begriffsklärungen

Zahlen kommen heutzutage in allen Lebensbereichen vor, was deutlich wird, wenn man die Tageszeitung aufschlägt oder wenn man sich selbst befragt: 'Wozu brauche ich Zahlen?'.

Beispiele:

Beim Einkaufen: Geld, Preise, Preisschilder, Kasse, Kassenzettel, Stückzahlen, Gewichtsangaben, Zutatenangaben, Maßangaben, Schuhgröße, Kleidergrößen, …

ebenso beim Autofahren, in der Schule, beim Sport, in der Küche, beim Fernsehen, …

Die Zahlen, die uns im Alltag begegnen, werden meist im Zusammenhang mit irgendwelchen Größen als benannte Zahlen gebraucht, im Gegensatz zur Schule, wo sie häufig als reine Zahlen auftauchen, mit denen dann verschiedene Rechenoperationen geübt werden.

So vielfältig, wie die Kontexte und Situtionen des täglichen Lebens, in denen uns Zahlen begegnen, sind auch die Begriffe, die benutzt werden, um das Wissen über Zahlen und den richtigen Umgang mit ihnen in unterschiedlichen Nuancen und verschiedenen Kontexten zu beschreiben. Im Folgenden werden deshalb die wichtigsten Begriffe und Konzepte kurz vorgestellt und beschrieben.

1.1.1 Zahlwort und Zahlzeichen

Zahlwörter und Zahlzeichen dienen zur Wahrnehmung von Zahlen und zur Verständigung über Zahlen sowie zu Operationen mit Zahlen. Im Gegensatz zu den informatischen Konstrukten Wort und Zeichen wird im mathematisch-fachdidaktischen Gebrauch unter Zahlwort ausschließlich das in unterschiedlichen Sprachen gesprochene Wort für eine bestimmte Anzahl verstanden, z.B.: „eins, zwei, drei, …; un, deux, trois, …; jedan, dwa, tri, …;“ usw.

Die Zahlzeichen sind in allen Sprachen gleich. Zur Bildung von Zahlzeichen im Zehnersystem, aus dem Bereich der natürlichen Zahlen, werden die Ziffern (0 .. 9) verwendet. Zahlzeichen selbst sind natürlich nicht nur Ziffern, sondern auch Ziffernfolgen und Rechenausdrücke oder Zahlterme (vgl. [MAIER 1990, 7]).

Diese Zahlwörter und Zahlzeichen erhalten für ihren Gebrauch erst dann einen Sinn, wenn mit ihnen Bedeutungsvorstellungen verknüpft sind. Man muss wissen, wofür sie stehen oder wenigstens, wie mit ihnen umzugehen ist.

1.1.2 Zahlaspekte

Zahlaspekte ([KRAUTHAUSEN/SCHERER 2003, 7ff.]; [PADBERG 1992, 8f.]), Aspekte des Zahlbegriffs [PADBERG1992, 6ff.], Zahlbegriffsaspekte [RADATZ/SCHIPPER 1983, 48ff.] oder Aspekte der Zahlbedeutung [MAIER 1990, 8] sind eine Beschreibung *‘…unterschiedlicher Verwendungsarten natürlicher Zahlen. … sie machen (jedoch) verschiedene Anwendungsbezüge deutlich.’* [RADATZ/SCHIPPER 1983, 48f.]. Die Beschreibung dieser unterschiedlichen Verwendungsarten natürlicher Zahlen erfolgt in der Literatur aus eher mathematischer Sicht.

Genauere Ausführungen zu den genannten Anwendungsbezügen und einzelnen Zahlaspekten sind unten unter 1.2 nachzulesen.

1.1.3 Zahlbegriff

Das Gesamtwissen über Zahlen und die mit ihnen möglichen Operationen, welches ein Individuum hat, wird als Zahlbegriff bezeichnet. Beim Erwerb eines umfassenden Zahlbegriffs spielen die verschiedenen Aspekte des Zahlbegriffs (Zahlaspekte) eine Rolle. Diese stark mathematisch geprägte Sicht auf den Zahlbegriff wird allerdings durch die neuere psychologische Forschung (vgl. 1.3) mehr in Richtung individuellen Lernens von Zahlen und weg von vorwiegend mathematisch geprägten kardinalen Aktivitäten verschoben. Im Laufe des Lebens wird der Zahlbegriff immer weiter ausgebaut, indem man neue Zahlbereiche, Zahlen in neuen Kontexten und neue Operationen mit Zahlen kennenlernt. Man erlernt z.B. neu den Umgang mit Eurobeträgen. Man lernt, dass 10 Megabyte (10000 Kilobytes) also 10.000.000 Bytes eigentliche eine kleine Zahl ist und nicht ausreicht, wenn man ein größeres Dokument, ein Bild oder eine Videosequenz elektronisch speichern will. Bekannte Operationen, wie die Addition, werden erweitert zur Addition von Bruchzahlen oder von negativen Zahlen. Man lernt außerdem flexibel zwischen der Abstraktion Zahl, die man für Operationen braucht, und deren Realisierung in der konkreten Anwendungssituation zu wechseln. Der Zahlbegriff umfasst also alles Wissen und Können, das man für einen sicheren Umgang mit Zahlen braucht. Er wird im Laufe der kindlichen Entwicklung immer weiter ausgebaut. Einen, aus fachlicher Sicht, voll entwickelten Zahlbegriff, der es erlauben würde, alle im Bereich der Mathematik möglichen Operationen durchzuführen und zu verstehen, erreichen nur wenige. Was in der Grundschule als Zahlbegriff im Bereich der natürlichen Zahlen entwickelt wird, trägt nicht sehr weit und muss schon in Klasse 6 bei der Einführung der rationalen Zahlen erweitert und teilweise revidiert werden. Damit steht das Fach Mathematik auch im Gegensatz zum Fach Deutsch, wo die Grundfertigkeiten des Lesens und Schreibens, die in der Grundschule ausgebildet werden, ausreichen, um im Wesentlichen alles lesen und alles schreiben zu können. In dieser Arbeit soll zunächst unter einem entwickelten Zahlbegriff verstanden werden, dass die Kinder in der Grundschule die natürlichen Zahlen, einschließlich der Zahl Null, verstehen, das heißt in unterschiedlichen Kontexten als Relationszahlen sinnvoll gebrauchen können.

In der fachdidaktischen Literatur findet man diese Definitionen in sehr unterschiedlichen und z. T. auch etwas einseitigen Ausprägungen.

JOHANN [1999, 10] versucht in seiner Dissertation - Eine empirische Theorie des Zahlbegriffs - *'…die Verwendung der natürlichen Zahlen als Kardinalzahlen durch eine empirische Theorie zu beschreiben.'* Das zeigt eine eingeschränkte und rein mathematische, formale Sichtweise auf das, was unter Zahlbegriff zu verstehen ist.

Auch MOSER OPITZ [2001, 38] sieht den Zahlbegriff sehr eng, nur bezogen auf Anzahlen und Zählzahlen, bzw. das Auszählen von Mengen: *'Ein Kind hat den Zahlbegriff dann erworben, wenn es diese Verbindung zwischen Ordination und Kardination herstellen kann.'*

PADBERG [1992, 9] beschreibt, wie die Kinder erst im Laufe der Schulzeit, wenn sie verschiedene Zahlaspekte isoliert kennengelernt haben, Beziehungen zwischen diesen Zahlaspekten erkennen. *'So gelangen sie allmählich zu einem umfassenden Zahlbegriff, der die verschiedenen Aspekte integriert.'* Der Zahlbegriff ist für ihn also kein rein mathematisches Konstrukt, sondern muss in einem individuellen Entwicklungsprozess erworben werden.

MAIER [1990, 7] geht von Zahlwörtern und Zahlzeichen aus, die, wenn man sie mit Bedeutungsvorstellungen verbindet, das ergeben, *'…was man einen Zahlbegriff nennt.'* Er verwendet 'Zahlbegriff', um damit das Wissen über eine bestimmte Zahl zu beschreiben:*'Der Erwerb des Zahlbegriffs eins wurde hier als deutlich schwieriger eingestuft, als das Verstehen anderer kleiner Zahlen wie zwei, drei oder vier.'* [MAIER 1990, 190].

KRAUTHAUSEN/SCHERER [2003, 7ff.] nennen im Unterkapitel *'Komplexität des Zahlbegriffs (Zahlaspekte)'* als Hauptaufgabe des Anfangsunterrichts in Mathematik den *'…Ausbau, die Festigung und Systematisierung des Zahlbegriffsverständnisses.'* Sie weisen auch darauf hin, dass Zahlbegriff weit mehr beinhaltet, als z.B. die Charakterisierung der natürliche Zahlen mit Hilfe der Peano-Axiome. *'Die Komplexität des Zahlbegriffs wird in der mathematikdidaktischen Literatur gemeinhin (u.a.) mit der Vielfalt der Zahlaspekte verbunden. Um den Zahlbegriff in seiner Ganzheit zu erfassen, was nicht zuletzt auch die vielfältigen Verwendungszusammenhänge der Zahlen im Alltag erfordern, ist es nötig, den Aspektreichtum der Zahlen auszubauen, zu systematisieren und zu vertiefen.'*

FREUDENTHAL [1973, 159] geht sogar noch weiter und beschreibt Zahlbegriff als eine Verbundstruktur, aufgebaut aus unterschiedlichen Teilbegriffen: *'Die Einzahl 'Zahlbegriff' ist irreführend. Es gibt viele Zahlbegriffe, inhaltlich, formal, methodologisch, genetisch, didaktisch... Als objektive Zugänge zum Zahlbegriff möchte ich grob unterscheiden: Zählzahl, Anzahl, Maßzahl, Rechenzahl.'*.

LORENZ [1993c, 50ff.] beschreibt den Zahlbegriff als eher individuell ausgebildetes Wissen über Zahlen, von Zahlenbeziehungen und Rechenoperationen, repräsentiert durch individuelle Vorstellungsbilder.

RADATZ/SCHIPPER u.a. [1996, 32] überschreiben ein Kapitel in ihrem Buch mit *'Förderung von Zahlbegriffsentwicklung und Zahlverständnis.'* und deuten damit an, dass Zahlbegriff mehr sein muss, als Zahlen unter verschiedenen Aspekten gebrauchen zu können.

Geprägt wurden alle diese Vorstellungen zum Aufbau des Zahlbegriffs aber hauptsächlich durch die Arbeiten von PIAGET [1975b] und AEBLI [1975] (siehe auch 1.2.6).

1.1.4 Zahlvorstellung und *Number Sense*

Während Zahlbegriff die mehr mathematische Perspektive des Wissens über Zahlen und über Operationen mit Zahlen beschreibt, haben die Begriffe Zahlvorstellung, bzw. *Number Sense* im englischsprachigen Raum, eher die individuelle Ausprägung dieses Wissens und die Fähigkeit, Zahlenwissen kontextsicher anwenden zu können im Blick.

Bei dem Begriff Zahlvorstellung denkt man natürlich an interne Vorstellungsbilder (siehe 1.1.6 und 1.2), die einem dabei helfen, Zahlen zu verstehen, Zahlen zu vergleichen und mit Zahlen zu operieren. Der englische Ausdruck *Number Sense*, also ein 'Gefühl oder Gespür für Zahlen' haben, beschreibt diese individuelle Komponente noch deutlicher. Man muss ein Gefühl für Zahlen und mögliche Operationen haben, abschätzen können, ob das Ergebnis einer Operation überhaupt plausibel ist, mit großen Zahlen überschlagsmäßig, ausgleichend gerundet, operieren können, strukturierte Mengen schnell mit einem Blick erfassen können, usw.

Alle diese Fähigkeiten werden durch viel Erfahrung beim Umgang mit Zahlen und durch Vernetzung mit anderen Bereichen wie z.B. Statistik, Geometrie, Sachunterrricht, usw... erlernt, sind zum Teil aber auch angeboren (siehe 1.2).

Dass *Number Sense* aber nicht selbstverständlich ist, kann man fast täglich in Zeitungen und Büchern nachlesen:

- In einem Werbeprospekt wird die Schlägerfläche eines Tennisschlägers mit 95 cm² angegeben - ungefähr der Fläche eines Bierdeckels! Die Fehlinterpretation kommt von der Gleichsetzung Square-Inch mit cm².
- In einer wissenschaftlichen Arbeit wird beschrieben, dass 3,30% bzw. 2,20% der 15 Versuchspersonen eine bestimmte Aufgabe nicht bearbeitet

haben - das sind dann 0,495 bzw. 0,33 Personen! Der Autor versucht kleine Anzahlen durch Prozentangaben aufzupolieren und tappt in seine eigene Falle: ansehnliche Prozentsätze bei kleinen Grundwerten erzeugen sehr kleine Prozentwerte.

Wie man Number Sense aufbauen kann, zeigen sehr schön die vielen Materialien des NCTM, wo z.B. ein Kindergartenlehrgang die Themen *'Patterns ... Number Sense and Operations ... Making Sense of Data ... Geometry and Spatial Sense'* [BURTON 1991] miteinander verbindet.

Hier wird *Number Sense* auch nicht als mathematisches Konzept oder Konstrukt, sondern als Satz von Handlungsmöglichkeiten und Einstellungen definiert, die den Schülern helfen, mit Zahlen richtig umzugehen:

'Number Sense helps students

- *bridge the gap between the concrete and the symbolic by relating models, pictures, and diagrams to mathematical ideas*
- *discover basic math concepts and relationships*
- *acquire the language of mathematics based on understanding and reasoning*
- *create and solve problems, including real-life problems*
- *use a success-oriented approach that builds confidence and independence.'* [SUTER 1990, 3]

1.1.5 Eigenproduktionen und Eigenkonstruktionen

Eigenproduktionen sind Produkte von Schülern oder Schülergruppen, die während der selbständigen Auseinandersetzung mit einem mathematischen Thema oder Problem entstehen.

'Eigenproduktionen sind mündliche oder schriftliche Äußerungen, bei denen die Schüler selbst entscheiden können, wie sie vorgehen und/oder wie sie ihr Vorgehen bzw. dessen Ergebnisse darstellen. ... Eigenproduktionen ... können auch als Gemeinschaftsarbeit entstehen.' [SELTER 1995, 138f.]. *'Unter dem ... Begriff Eigenproduktionen werden schriftliche Dokumente in unterschiedlichen Erscheinungsformen verstanden'*. [SELTER 1995, 139].

Etwas allgemeiner formuliert GALLIN, wenn er den Lernprozess wie folgt charakterisiert: *'Am Anfang steht also nicht die Wissensvermittlung des Lehrers, am Anfang stehen Schülerprodukte ...'* [1991, 55].

Diese Eigentätigkeit der Schüler in einem umfassenden Kontext stellt auch WITTMANN in seinem Aufsatz *'Wider die Flut der 'bunten Hunde' und der 'grauen*

Päckchen': Die Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens und des produktiven Übens' [1992, 152ff.] als Kennzeichen für selbstgesteuertes Lernen heraus. Er geht sogar noch weiter und spricht von Konstruktion des Wissens: *'Diese Position (er meint damit Piaget, Anm. d. Verf.) interpretiert die Entstehung des Wissens im Lernenden als dessen aktive Konstruktion, d.h. als Resultat einer Wechselwirkung zwischen 'innen' und 'außen'... In dieser Sichtweise muß sich der Lernende also den jeweiligen Unterrichtsgegenstand aktiv erarbeiten. Der Lernstoff wird ihm nicht durch seine Sinne von außen zugeführt.'*[a.a.O.].

Während bei 'Eigenproduktionen' mehr das selbständige 'Erfinden' von Produkten durch die Schüler betont wird, bezeichnet 'Eigenkonstruktion' eher die mentalen Prozesse, die bei Eigenproduktionen ablaufen: *'...mit Eigenkonstruktionen hingegen werden informelle Lösungsstrategien bei komplexen Problemstellungen bezeichnet.'* [SELTER 1994, 30]. Der Terminus 'Eigenkonstruktion', der für das CEKA-Projekt verwendet wurde, zielt auf eine noch stärkere Betonung konstruktivistischer Vorstellungen. Lernen wird als selbstgesteuerter, aktiver Prozess, in einer bestimmten Situation (Mikrowelt), gesehen.

Diese Position findet man nun auch bei SELTER/SPIEGEL: *'Lernen findet als ein stets konstruktiver und individueller Prozess statt.'* Echtes Lernen findet dann statt, *'wenn man sich an der Konstruktivität des menschlichen Lernens orientiert: Lernen ist ein aktiver Prozess; Kinder sind Entdecker.'* [2003, 26f.].

1.1.6 Mentale Modelle und Vorstellungsbilder

Mentale Modelle sind individuelle Denkmodelle, die das Verstehen einer Sache bestimmen, *'mit deren Hilfe wir planen und entscheiden, vorausschauen und erklären, kurz: mit deren Hilfe wir denken'* [HASEBROOK 1995, 124]. Mentale Modelle sind aber auch ein hypothetisches Konstrukt der Forschung um verschiedene Repräsentations- und Wissensformen zu integrieren: *'Mentale Modelle bilden den theoretischen Alleskleber, der konzeptuelle, anschauliche und prozedurale Wissensformen miteinander verknüpft.'* [BALLSTAEDT 1997, 4f].
Über die Repräsentierung mentaler Modelle gibt es unterschiedliche Vorstellungen. In WEIDENMANN [1997a, 73] werden mentale Modelle als Informationseinheiten, die in bildhafter Form Zusammenhänge und Fakten repräsentieren, beschrieben. JOHNSON-LAIRD beschreibt mentale Modelle als projektive, in Gedanken quasi vorweggenommene, Möglichkeiten intentionalen Denkens: *'An organism can have an intention only if it has an operating system that can elicit a model of a future state of affairs, and decide that it 'itself' should act so as to try to bring about that state of affairs.'* [1983, 473]. Auch HOFFMANN vertritt diese

Meinung, er betont aber noch stärker den Zusammenhang mit der Verhaltensausführung, also mit motorischen Akten. Er führt aus, dass es sich bei den verhaltenssteuernden Antizipationen, die dem motorischen Akt vorausgehen, *'um Vorstellungen über die Transformierbarkeit von Ausgangs- in Zielsituationen handelt'*. Diese *'bilden in ihrer Summe quasi ein mentales Modell der Umwelt, das deren Zustände mit ihren Veränderbarkeiten jeweils soweit erfaßt, wie konsistente Verhaltenserfahrungen gemacht wurden.'* [1993, 50]. Mentale Modelle sind zunächst Mittel der Verhaltenskontrolle und an motorische Akte gebunden. Sobald sie aber unabhängig von der Verhaltensausführung erzeugt werden, gewinnen sie eine neue Qualität: *'Die in der Vorstellung erzeugten Zustände repräsentieren gerade jene Veränderungen, bzw. deren zentralnervöse Wirkungen, die erfahrungsgemäß eintreten, wenn der Verhaltensakt tatsächlich ausgeführt wird. Auf die so vorgestellten Verhaltenskonsequenzen kann man in Gedanken erneut einen Verhaltensakt anwenden, indem man sich die resultierenden Veränderungen erneut vorstellt usw. Allein in der Vorstellung lassen sich auf diese Weise Folgen von Verhaltenskonsequenzen in beliebiger Weise verbinden, ohne daß ein einziger Verhaltensakt tatsächlich ausgeführt werden muß.'* [a.a.O., 51]. EDELMANN [1996, 252f.] geht davon aus, dass mentale Modelle sowohl sprachliche, als auch bildhafte und handlungsbezogene Komponenten aufweisen und ganzheitlich-analog orientiert sind. Er beschreibt mentale Modelle als *'subjektive Wissensgefüge mit funktionalem Charakter'*, die der inneren Simulation äußerer Vorgänge dienen. Auf diese funktionale Komponente weist auch STERN hin: *'Am Ende eines Problemlöseprozesses wird ein auf die Grundstrukturen reduziertes mentales Modell konstruiert, das zur Ausführung der aktionalen Voraussetzungen führt.'* [1998, 31]. Eine Definition, welche die vorgenannten Einzelaspekte integriert, bietet SEEL an, wenn er schreibt, mentale Modelle seien *'kognitive Konstruktionen, mittels derer eine Person ihre Erfahrung und ihr Denken derart organisiert, daß sie eine systematische Repräsentation ihres Wissens erreicht, um subjektive Plausibilität zu erzeugen oder spezifische Vorgänge der Objekt- und Ereigniswelt in der Vorstellung zu simulieren.'* [2000, 375]. Allerdings ist nicht ganz klar, wie diese mentalen Modelle letztlich initiiert werden und welche Mechanismen an deren Aufbau beteiligt sind.

Vorstellungsbilder bezeichnen dann mentale Modelle bildhafter Wahrnehmungen. Dabei sind aber Vorstellungsbilder *'nicht das Abbild der Wahrnehmung sondern die bildliche Form des Wissens um das Objekt... Vorstellungsbilder sind aus Wissenselementen aufgebaut...Vorstellungsbilder sind vage...sind selten numerisch...sind idiosynkratisch...besitzen Symbolfunktion'* [LORENZ 1992, 45f]. Auch KRAUTHAUSEN/SCHERER unterstreichen im Zusammenhang mit Arbeitsmitteln im Anfangsunterricht die Bedeutung von Vorstellungsbildern: *'Ziel des*

Einsatzes von Arbeitsmitteln und Veranschaulichungen ist ... die Konstruktion und der Ausbau klarer, tragfähiger mentaler Vorstellungsbilder.' [2003, 216].

Genauso vage, wie die Vorstellungsbilder selbst, ist auch das Wissen darüber, wie sie entstehen oder wie deren Ausbildung gefördert werden kann. Man nimmt an, dass solche Vorstellungsbilder sich nicht beim reinen Betrachten von Visualisierungen, sondern beim Gebrauch von Arbeitsmitteln und Veranschaulichungen im Laufe der Zeit ausbilden. *'Die visuellen Vorstellungsbilder entwickeln sich in der Altersstufe der Grundschüler auf der Basis von selbstausgeführten Handlungen.'* [LORENZ 1992, 184]. Vorstellungsbilder entstehen, genau wie mentale Modelle, aus Handlungen, wie die Aussagen von HOFFMAN (s.o.) belegen. Eine weitere Theorie, die diese stützen könnte, ist die Theorie der dualen Codierung [PAIVIO 1986]. Diese sagt einfach ausgedrückt aus, dass eine Wahrnehmung sowohl sprachlich wie auch bildlich gespeichert und auch verarbeitet werden kann. Hier wäre das Vorstellungsbild, bzw. die damit verbundene Handlung, die entsprechende bildliche Komponente zum sprachlichen Inhalt in der formalen mathematischen Fachsprache. Das Bild der Mengenvereinigung einer konkreten Zweier- mit einer Dreiermenge würde man fachsprachlich abstrakt als 2 + 3 beschreiben. Die entstandene Vereinigungsmenge (Fünfermenge) wird mit 5 beschrieben. Das Kind kann dann, falls es die Fachsprache mit ihren Ziffern- und Operationszeichen verstanden hat, dazu ein entsprechendes, strukturell passendes Bild aktivieren. Es stellt sich zur Zahl 5 z.B. eine Fünfermenge oder auch eine Dreier- mit einer Zweiermenge aus beliebigen Objekten vor. Wenn die Theorie gilt, dann müssten aber Terme oder 'Zahlensätze', wie man sie in der Grundschule nennt, wirklich als sprachliche Konstrukte interpretiert und gespeichert werden (siehe hierzu 1.3). Diese sprachlichen Konstrukte könnten danach strukturgleiche innere Vorstellungsbilder initiieren, mit denen man dann in Gedanken operieren kann.

1.1.7 Mentales Operieren

Wenn mentale Modelle und Vorstellungsbilder aufgebaut sind und der Schüler fähig ist, *'sich die, mit einer Handlung am Veranschaulichungsmaterial verbundenen numerischen Veränderungen auch vorzustellen...'*, verfügt er *'... über die Fähigkeit zum mentalen Operieren... Dies bedeutet, daß er die in seiner Anschauung vorgestellten Bilder verändern können muß.'* [LORENZ 1992, 184]. Die Vorstellungsbilder müssen so stabil sein, dass an ihnen *'die arithmetischen Operationen in der Vorstellung ausgeführt und die Rechenergebnisse abgelesen werden können.'* [GERSTER 1994, 41]. Diese für den Mathematikunterricht grundlegende

Fähigkeit des mentalen Operierens wird besonders während der Grundschulzeit gefördert und ausgebildet. *'Aufgrund der fundamentalen Bedeutung des mentalen Vorstellens und Operierens für spätere Lernprozesse liegt hier eine ganz entscheidende Stelle der Unterrichtspraxis vor.'* [KRAUTHAUSEN/SCHERER 2003, 217]. Dabei sollte aber nicht nur die Arithmetik, sondern auch die Geometrie, als anschauliches Übungsfeld für mentales Operieren beachtet werden: *'Diese Fähigkeit, Vorstellungsbilder zu entwickeln und sie zu verändern, ist also eine notwendige Voraussetzung für das Rechnen und die Zahlen im Kopf. Aus diesem Grund spielt die Geometrie in der Grundschule als Förderung der visuellen Fähigkeiten eine so bedeutende Rolle.'* [LORENZ 2002, 25]. Als besonders förderlich werden Aufgabenstellungen angesehen, die beide Gebiete, Arithmetik und Geometrie, integrieren: *'Zur Ausbildung der notwendigen Teilfähigkeiten, die den Schülern das Ausbilden visueller Vorstellungsbilder und das mentale visuelle Operieren ermöglichen, ist eine Behandlung geometrisch-topologischer Inhalte vor der Einführung der arithmetischen Operationen sinnvoll.'* [LORENZ 1992, 186]. Beispiele solcher arithmetisch-geometrischer Inhalte und Aufgaben findet man in LORENZ [1997, 65ff.].

1.1.8 Mentaler Zahlenstrahl

Um mit Zahlen mental operieren zu können, müssen sie in irgendeiner Repräsentation 'zugreifbar' sein. Das Endprodukt eines Repräsentierungsprozesses, etwa in Form einer bildlichen Menge, wäre natürlich nicht abstrakt genug, um damit flexibel Relationen und Operationen, auch mit größeren Zahlen, durchführen zu können. Heute geht man davon aus, dass Zahlen mental u.a. auf einer Art Zahlenstrahl repräsentiert sind (s.u.1.3.3). Auch LORENZ vertritt diese Meinung der Repräsentation auf einer Zahlengerade: *'Betrachtet man das Rechnen im Kopf, dann wird schnell deutlich, dass wir Zahlen räumlich repräsentieren: Wir denken sie uns meist auf einer Zahlengerade, die die Abstände und Beziehungen zwischen Zahlen abzubilden versucht. So können wir einzelne Zahlen nicht denken sondern nur immer in Relation zu anderen; die 16 liegt zwischen 10 und 20 ungefähr in der Mitte, ganz nahe an der 15 etc.'* [2002, 24].

Wir verwenden hier den Begriff '*mentaler Zahlenstrahl*', da die Kinder der ersten Klasse wohl eher die Vorstellung eines Strahls haben, der bei der Zahl 0 oder eventuell sogar bei 1 beginnt, und bei dem die natürlichen Zahlen wahrscheinlich in Leserichtung von links nach rechts aufsteigend angeordnet sind. Der Zahlenstrahl hat sicher noch Lücken und geht nicht sehr weit, die Kinder verfügen aber bereits über die notwendigen grundlegenden Fähigkeiten, um ihn weiter ausbauen zu können (s.u. 1.3).

1.2 Der Zahlbegriff aus mathematischer Sicht

Wie kommt man mit Mitteln der Mathematik zu den natürlichen Zahlen? Ausgehend von den drei grundlegenden Zahlaspekten werden drei Wege zu natürlichen Zahlen skizziert und es wird dargestellt, welche mathematischen Begriffe und welche Abstraktionsstufen dabei eine Rolle spielen. In der Zusammenfassung (s.u.) wird aber deutlich werden, dass eine rein mathematische Grundlegung der Didaktik eher unvollständig wäre und eine sehr verengte Sicht auf den Erwerb des Zahlbegriffs bieten würde.

Jedes Kind, das heute in die Schule kommt, kann schon mehr oder weniger weit und sicher zählen. Im letzten Jahrhundert waren deshalb nicht wenige Mathematikdidaktiker der Auffassung, man könne den gesamten Anfangsunterricht in Mathematik über das Zählen erarbeiten. Dies führte zu einem regelrechten Streit und zwei Richtungen in der Mathematikdidaktik ('Zähler' vs. 'Anschauer'). Mit der Einführung der sogenannten 'Mengenlehre' in die Grundschule (1972) wurde der kardinale Aspekt im Anfangsunterricht bestimmend. Eine kompakte Übersicht über die Entwicklung des Rechenunterrichts in Deutschland findet man z.B. in RADATZ/SCHIPPER [1983, 36ff.]. Inzwischen haben sich extreme didaktische Auffassungen eingeebnet und es gilt die Lehrmeinung, dass sowohl der kardinale wie auch der ordinale Aspekt für die Ausbildung einer guten Zahlvorstellung und für einen flexiblen operativen Umgang mit Zahlen von Bedeutung sind (vgl. [PADBERG 1992, 39f.]; [RADATZ/SCHIPPER u.a. 1996, 47f.]).

Der Maßzahlaspekt (Längenvorstellung) wird aber immer noch eher wenig thematisiert. Dies sieht man beispielhaft im Projekt Mathe2000. MÜLLER/WITTMANN [1995, 20f.] nennen als Grundideen der Arithmetik u.a. folgende:

> *'Idee 1 - Zahlreihe: die natürlichen Zahlen bilden eine Reihe, von der Abschnitte beim Zählen durchlaufen werden.*
>
> ...
>
> *Idee 6 - Zahlen in der Umwelt: Zahlen lassen sich vielfältig verwenden als Anzahlen, Ordnungszahlen, Maßzahlen, Operatoren und Codes'*

In Idee 6 tauchen zwar alle Zahlaspekte auf, bei der Umsetzung der Ideen (vgl. [WITTMANN/MÜLLER 1990, S.8ff.]) werden dann aber hauptsächlich Punktmuster, Wendeplättchen, Wendekärtchen mit Mengenbildern verwendet. '*Bei der zweiten Gruppe von Übungen zur Zahlerfassung und zur Umstrukturierung von konkret und bildlich dargestellten Zahlen konzentrieren wir uns dagegen auf den*

Zehnerraum (...) und arbeiten mit Plättchen und Punktmustern. Wir benutzen also Zahlen als Anzahlen (kardinaler Zahlaspekt).' [WITTMANN/MÜLLER 1990, 16]. *'Die Zwanzigerreihe betont dagegen den ordinalen Zahlaspekt'* [a.a.O, 34]. Nirgends findet man einen Hinweis auf den Maßzahlaspekt (Längenvorstellung), obwohl gerade bei der Zwanzigerreihe durch farbliche Hervorhebung und auch beim Zwanzigerfeld [a.a.O.] immer mit der 'Kraft der Fünf' argumentiert wird, um größere Anzahlen simultan erfassen zu können. Die Zahl 5 soll als Ganzes, als Einheit wahrgenommen werden, also konkret als Rechenschiffchen, als Block, als Fläche oder als Streckenobjekt. Zwei solche Fünferobjekte sind dann ein Zehnerobjekt, also 10, weil sie z.B. doppelt so groß sind. Diese Sichtweise entspricht genau dem, was man unter dem Maßzahlaspekt versteht. Ebenso spielt beim Arbeiten mit strukturierten Plättchenmengen neben der Anzahl immer auch die Form, Anordnung oder Struktur der Menge eine Rolle. Beim Verdoppeln verdoppelt sich die Struktur, beim Halbieren von Plättchenmengen wird nicht nur die Anzahl halbiert sondern auch die Struktur. Auch hier spielen für die Wahrnehmung wohl eher Flächen oder Längen eine Rolle als Anzahlen. Die Anzahlen drücken nur mathematisch aus, wie die Relationen zwischen den wahrgenommenen Strukturen sind. Anzahlen sind hier quasi das Endprodukt einer ganzen Reihe von Abstraktionen. Das Projekt Mathe2000 zeigt so beispielhaft, dass die rein mathematische Sicht auf Zahlen (kardinal und ordinal), ohne auch Maßzahlaspekte sowie wahrnehmungspsychologische und neuropsychologische Aspekte der Zahlerfassung zu berücksichtigen, ein sehr verkürztes Bild der Prozesse erzeugt, die beim Zahlenlernen ablaufen. Trotzdem wird hier zunächst einmal der Zugang zu Zahlen unter diesem 'mathematischen Blick' entwickelt, um dann im Kapitel 1.3 diese 'Sichtweise' weiter auszubauen.

1.2.1 Aspekte des Zahlbegriffs

Wie schon in 1.1.3 beschrieben, werden Zahlen bei ganz unterschiedlichen Anlässen und in ganz verschiedenen Zusammenhängen gebraucht (siehe z.B. [PADBERG 1992, 7f.]). Wenn die Kinder einen umfassenden Zahlbegriff erwerben sollen, müssen sie natürlich auch Zahlen in solch unterschiedlichen Zusammenhängen und Bedeutungen kennenlernen, verstehen und gebrauchen. Dabei muß man sich aber durchaus darüber im Klaren sein, dass die unterschiedlichen Zahlaspekte verschieden gewichtet werden, je nach Schulbuch und gerade vorherrschender didaktischer Lehrmeinung. So wurde z.B. bei DIENES [1965], mit der Einführung der Mengenlehre in die Schulen, die Zahl hauptsächlich 'als Eigenschaft einer Menge' im Anfangsunterricht verwendet. Beispiele hierfür waren in den 70er und 80er Jahren die Lehrwerke von BAUERSFELD [alef] oder NEUNZIG-SORGER [Wir lernen Mathematik]. In derselben Zeit wurden aber auch die Cuisenaire-Stäbe als didaktisches Material eingeführt. Mit diesem Material wurde im Lehrwerk von FRICKE-BESUDEN [Mathematik in der Grundschule] gearbeitet, das den Mathematikunterricht in Klasse 1 und 2 überwiegend auf dem Maßzahlaspekt aufbaute. Es gab aber auch schon integrative Ansätze wie z.B. bei GUDERIAN [spielen, rechen, selber denken]. In den letzten Jahren wurde mehr um schrittweise Ansätze oder ganzheitliches Vorgehen im mathematischen Anfangsunterricht gerungen. Die Fachdidaktik wurde stark von dem Dortmunder Mathe2000-Projekt [Zahlenbuch] bestimmt. Hier wird ein eher integrativer, ganzheitlicher Ansatz favorisiert.

Aspekte des Zahlbegriffs (acht Aspekte) werden von RADATZ/SCHIPPER [1983, 49], MÜLLER/WITTMANN [1984, 166f.] und von KRAUTHAUSEN/SCHERER [2003, 8] sehr übersichtlich, teils in Tabellen, dargestellt, wobei nicht klar wird, ob die Aspekte in der Tabelle nach ihrer Bedeutung für die Mathematik, nach der Häufigkeit der Verwendung im Mathematikunterricht, chronologisch, also wie sie im Mathematikunterricht eingeführt werden, oder nach irgendeinem anderen Kriterium geordnet sind. Eine etwas abweichende Einteilung findet man bei MAIER [1990, 8f.], der nur fünf Zahlaspekte nennt und auch eine andere Nomenklatur verwendet.

Übersicht über die Aspekte des Zahlbegriffs

Die Zahlaspekte sind nicht so einfach im Mathematikunterricht zu vermitteln, wie die mathematische Beschreibung dieser 'Verwendungsarten' glauben macht. *'Aus Sicht der Mathematik als Fachwissenschaft ließe sich einfach angeben (definieren), was wir unter Zahlen bzw. dem Zahlbegriff verstehen (...). In der Folge mag man versucht sein anzunehmen, dass es keiner großen Mühe bedürfe, den Zahlbegriff - 'angemessen' elementarisiert - den Kindern nahezubringen. Muss man ihnen nicht letzlich einfach zeigen 'wie es geht'? In dieser Trivialisierung - sowohl der Sache als auch der eigentlichen Anforderungen und Schwierigkeiten des Mathematiklernens und -lehrens liegt, sofern sie gar von angehenden Lehrerinnen selbst adaptiert und vertreten wird, die Ursache für manche Probleme des mathematischen Anfangsunterrichts.'* [KRAUTHAUSEN/SCHERER 2003, 7]

Zur besseren Veranschaulichung und als Ausgangspunkt für weitere Überlegungen wird im Folgenden eine der Tabellen zu den verschiedenen Zahlaspekten gezeigt.

KRAUTHAUSEN/SCHERER schreiben dazu: '*Die Zahlaspekte verstehen sich als Hintergrundwissen der Lehrerin. Sie müssen im Mathematikunterricht zwar vollständig und angemessen repräsentiert sein, um Einseitigkeiten vorzubeugen und der Vielfalt der potenziellen Zahlverwendungsmöglichkeiten gerecht werden zu können. Das bedeutet jedoch nicht, dass sie als solche auch begrifflich thematisiert würden,...*'[2003, 9].

Die folgende Tabelle zeigt eine Aufzählung der Zahlaspekte, jeweils mit Beschreibung, mit erklärenden Beispielen und Handlungsbeispielen für die Operationen Addition und Subtraktion.

Zahlaspekte	Beschreibung	Beispiele	Addition	Subtraktion
Kardinalzahlaspekt	Zahlen beschreiben die Mächtigkeit von Mengen, die *Anzahl* von Elementen einer Menge	3 Äpfel, 5 Gongschläge, 9 Zahlen, 10^{13} Möglichkeiten,	vereinigen, zusammen legen	wegnehmen, Fehlendes berechnen
Ordinalzahlaspekt	*Zählzahl*: Folge der nat. Zahlen, die beim Zählen durchlaufen werden.	'eins, zwei, drei, vier, ...' 'zehn, neun, acht, ...'	weiterzählen	rückwärtszählen
	Ordnungszahl: Rangplatz in einer geordneten Reihe	'Ich bin der Fünfte im Wartezimmer'		
Maßzahlaspekt	Maßzahlen für Größen	10 Minuten 2 Meter 5 Euro	aneinander legen entsprechender Repräsentanten	Abtrennen entsprechender Repräsentanten, Unterschied
Operatoraspekt	Bezeichnung der Vielfachheit einer Handlung oder eines Vorgangs	Noch fünfmal schlafen bis zu den Ferien	Hintereinanderausführung, nacheinander vervielfachen	Umkehroperator, wie oft noch?
Rechenzahlaspekt	*Algebraischer Aspekt*: (N,+) ist eine algebraische Struktur (mit bestimmten Eigenschaften)	36+(17+4)=(36+4)+17 Kommutativität/Assoziativität 23*27=625-4 (a-b)*(a+b)=a²-b²	Rechnen mit Ziffern (schriftliche Rechenverfahren) statt Rechnen mit Zahlen (halbschriftliche Strategien)	
	Algorithmischer Aspekt: Rechnen als 'Ziffernmanipulation' nach festgelegten Regeln	629 +563 1191		
Kodierungsaspekt	Bezeichnung von Objekten	33501 Bielefeld, Tel. 428383704, ISBN 3-8274-1019-3, PPC 4600	(macht keinen Sinn)	

Tab. 1.01: Aspekte des Zahlbegriffs [n. KRAUTHAUSEN/SCHERER 2003, 8]

Wie jede Zusammenfassung stellt die Tabelle die Zahlaspekte natürlich sehr plakativ und z. T. verkürzt dar. Beim Algebraischen Aspekt wird nur ($\mathbf{N}$, +) genannt, obwohl natürlich auch ($\mathbf{N}$, *) eine in der Grundschule behandelte algebraische Struktur ist. Relationen tauchen in der Tabelle nirgends auf, obwohl gerade Relationen die Grundlage für einen weiterentwickelten Zahlbegriff bilden.

Die Tabelle beschreibt das Zielkonzept von Zahlen, das die verschiedenen Zahlaspekte integriert, zeigt aber keine Bezüge zwischen den verschiedenen Zahlaspekten und macht auch nicht deutlich, dass die einzelnen Zahlaspekte nicht als Gesamtkonzept erworben werden, sondern sich langsam aus Einzelkonzepten aufbauen, die zudem noch vernetzt werden müssen (vgl. Abb. 1.02). Auch die durchaus vorhandene unterschiedliche Qualität, die in den einzelnen Zahlaspekten beschrieben wird, stellt die Tabelle nicht explizit dar.

Die tabellarische Übersicht sollte auch nicht mit einer didaktischen Stufung gleichgesetzt werden, die Zahlaspekte bauen nicht auf dem kardinalen Aspekt auf. Es wird außerdem nicht klar, dass zunächst einmal die Zahlen als solche unter den verschiedenen Aspekten konstruiert werden müssen, damit man dann in einem zweiten Schritt mit ihnen operieren, also z.B. Addition und Subtraktion ausführen kann. Einfach gesagt, es wird nicht unterschieden zwischen dem, was Zahlen sind oder wie man sie konstruieren kann und wie man mit ihnen umgeht bzw. was man mit ihnen machen kann. Besser erscheint mir deshalb eine Unterscheidung in grundlegende und weiterführende Zahlaspekte.

Grundlegende oder fundamentale Zahlaspekte

Die Grundideen von Zahlen werden über drei Aspekte vermittelt: Menge, Zählzahl und Maßzahl (Länge). Die grundlegenden Zahlaspekte beschreiben Beziehungen zwischen einzelnen Zahlen und der Wirklichkeit, es geht also um den Gebrauch von Zahlen zur Beschreibung von Situationen, Anordnungen, Anzahlen usw. Zu den grundlegenden Zahlaspekten zählen der Kardinalzahlaspekt, der Ordinalzahlaspekt und der Maßzahlaspekt:

- Es wird eine Anzahl von Objekten in einer realen Situation wahrgenommen und dann mit einer Zahl beschrieben.
- Zahlen werden benutzt, um eine Reihenfolge herzustellen und die einzelnen Elemente dieser Ordnung durch Zuweisen einer Zahl zu benennen.
- Eine Zahl wird benutzt, um eine bestimmte Größe näher zu beschreiben, also als Maßzahl für eine Größeneinheit.

Bei allen drei Aspekten geht es zunächst einmal darum, eine einzelne Zahl, die als Abstraktion für eine bestimmte Situation dient, zu bestimmen. Beim kardinalen Aspekt wird z.B. eine Zahl benutzt, um damit die Anzahleigenschaft einer Menge, z.B. von Plättchen, zu beschreiben. Die Schüler können zu einem Mengenobjekt eine Zahl konstruieren, durch Subitizing (vgl. 1.3.2) oder durch Abzählen, oder sie können zu einer vorgegeben Zahl verschiedene Mengenobjekte konstruieren, alle mit derselben Anzahleigenschaft. Gleichzeitig wird die Anzahl noch mit einem Zahlwort benannt.

Beim ordinalen Aspekt wird eine Zahl benutzt, um ein Objekt in einer geordneten Reihe relativ zu einem Anfang zu benennen. Hier liegt zwar der Fokus auf dem Objekt und der Zahl, die es benennt, allerdings spielt auch der Kontext eine Rolle, da die Zahl ja Vorgänger und Nachfolger hat bzw. das Objekt Nachbarobjekte hat, die auch benannt wurden. Die Zahl entsteht aus dem Kontext und man kann die Zahl ohne den Kontext nicht denken. Das fünfte Objekt einer Objektkollektion, die gezählt wird, bzw. die Zählzahl 5 hat eben die Objekte 4, 3 ,2 ,1 vor sich und das Folgeobjekt ist das 6. oder die Zahl 6 und heißt 'sechs'.

Beim Maßzahlaspekt wird die Zahl benutzt, um z.B. einen Cuisenairestab der Länge 3 zu benennen. Hier spielt nicht nur das zu bezeichnende Objekt, sondern auch die Einheit eine Rolle, aus der sich ja die Längeneigenschaft durch Vervielfachen ergibt. Die Zahl ist also eher eine Relation (oder eine Funktion) zwischen der Länge der Einheit und der Länge des zu benennenden Objekts. Der Maßzahlaspekt, hier Längenrelationen, spielt aber auch bei den erstgenannten beiden Aspekten eine Rolle. Mengen, insbesondere strukturierte Mengen, können ohne die Wahrnehmung von Längen nicht klassifiziert werden. Man nimmt z.B. 'Fünfer' als Muster oder als Objekte mit bestimmter Länge bzw. räumlicher Ausdehnung wahr. Auch beim Zählen oder der Reihe der Zählzahlen, dargestellt am Zahlenstrahl, spielen Längenaspekte eine Rolle.

Damit wird klar, dass sich die Situation nur beim kardinalen Aspekt einfach darstellt, wo man eine einfache Beziehung Menge-Kardinalzahl hat. Eine Menge von zählbaren Objekten kann in ihrer Zahleigenschaft durch eine Kardinalzahl beschrieben werden und eine einzelne Zahl kann durch eine oder mehrere zahleigenschaftsgleiche Mengen repräsentiert werden. Schon beim ordinalen Aspekt, wenn man einmal vom rein verbalen Aufsagen der Zahlwörter, das man aber kaum als Zählen bezeichnen kann, absieht, ist die Situation komplizierter. Die Zuordnung ist kontextabhängig, eine Zählzahl kann nur im Kontext (kardinal oder ordinal) erzeugt und gedacht werden.

Zählzahlen werden zusammen mit zu zählenden Objekten und zusammen mit der Folge der Zählzahlen gebraucht. Beim Maßzahlaspekt schließlich haben wir es eigentlich mit einer doppelten Abstraktion zu tun, die Zahl steht für die Funktion, die das Verhältnis der Länge des Objekts zur Einheit beschreibt. Allen drei Aspekten ist aber gemeinsam, dass einzelne Zahlen erzeugt oder benannt werden.

Der Ausschnitt aus einer Grafik von FUSON [1992, 128] zeigt einen anderen Blick auf die Zahlaspekte.

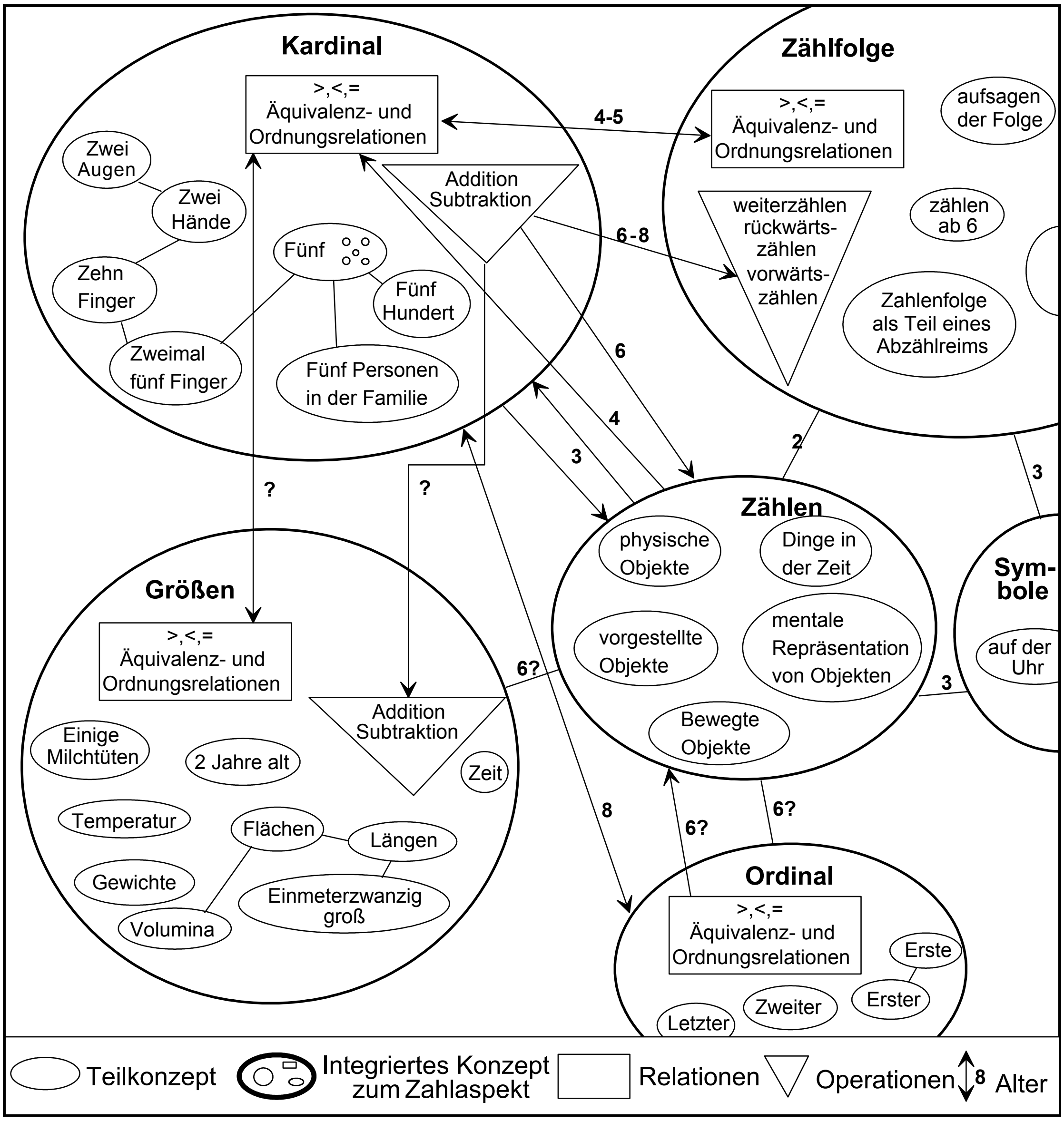


Abb. 1.02: Zusammenhänge zwischen den Zahlaspekten [n. Fuson 1992, 128]

Wenn man auch noch die anderen Zahlaspekte mit ihren Bedeutungen und den dahinterstehenden Teilkonzepten, sowie die Relationen und Operationen mit berücksichtigt, ist der Zusammenhang zwischen den Zahlaspekten lange nicht mehr so übersichtlich, wie Tabelle 1.01 glauben macht, sondern eher unübersichtlich und kompliziert. Wie man der Grafik 1.02 entnehmen kann, werden zunächst einzelne Teilkonzepte zu Zahlen erworben, die dann im Laufe der Zeit zu umfassenden integrierten Konzepten verbunden werden. Diese Teilkonzepte werden schon relativ früh in unterschiedlichen Alterstufen aufgebaut und ausgebaut. In die Konzepte sind schließlich auch Relationen und Operationen mit Zahlen integriert.

Zwischen den Konzepten zu einzelnen Zahlaspekten besteht schon vor Beginn der Grundschulzeit ein Geflecht von Bedeutungen und Zusammenhängen, das dann in der Grundschule weiter ausgebaut wird. Es ist auch zu sehen, dass zum Bereich Maßzahlaspekt bei Zahlen keine gesicherten Altersangaben für die Entwicklung der Relationen und Operationen vorliegen, hier besteht offensichtlich Forschungsbedarf.

Beziehungen (Relationen) zwischen Zahlen

Als verbindendes Element zwischen den grundlegenden Zahlaspekten, die quasi den Herstellungsakt einzelner Zahlen beschreiben, und vor allem als Übergang zu den weiterführenden Aspekten, welche die Operationen mit Zahlen beschreiben, kann man sich Relationen zwischen Zahlen denken. Zahlen werden miteinander verglichen, die einzelnen Zahlen werden aber nicht verändert, es werden keine neuen erzeugt, wie bei den Operationen mit Zahlen. *'Unlike object-counting competencies, which involve a single collection, numeral relationships involve two (or more) collections or numbers.'* [BAROODY 1992b, 317]. Man untersucht Beziehungen zwischen einzelnen Zahlen, die z.B. Mengen repräsentieren, einer Reihe von Zahlen oder die Umgebung um bestimmte Zahlen. STERN [1998, 75ff.] bezeichnet dies als '*Relationszahlverständnis*' bzw. als '*Relationszahlprinzip*'. Die Grundkonzepte 'Zahl mit der Funktion, die Mächtigkeit einer Menge zu beschreiben' und 'Zahl mit der Funktion, eine Rangfolge zu beschreiben' werden erweitert durch Konzepte, die es ermöglichen, Beziehungen zwischen Zahlen herzustellen und zu beschreiben. *'Während die Kardinalzahl durch das eigene Zählverhalten hergestellt werden kann, weil sie eine konkrete, existierende Menge beschreibt, bestimmt die Relationszahl eine der unmittelbaren Wahrnehmung nicht zugängliche Beziehung zwischen zwei Mengen. Mit einer Relationszahl kann die Differenz (Peter hat 3 Murmeln weniger als Hans) oder die Proportion (Peter hat dreimal so viele Murmeln wie Hans) zwischen 2 Mengen beschrieben werden. In beiden Fällen handelt es sich bei der '3' nicht um eine Kardinalzahl, also eine Zahl, die eine konkrete, existierende Menge beschreibt, sondern um eine Relationszahl* [a.a.O. 77]. Dieser Übergang zu den

Relationszahlen ermöglicht erst ein flexibles Umgehen mit Zahlen, ihren Beziehungen und Operationen, losgelöst von Handlungen (vgl. [Lorenz 2002, 25]). Bei Geary findet man den Hinweis, dass relationales Verständnis (von Zahlen) die Grundlage zum Problemlösen ist (vgl. [GEARY 1994, 104ff.]). Er weist auch darauf hin, dass es bei den Relationen zwei Perspektiven gibt, die ein unterschiedliches Schwierigkeitsniveau haben: *'For most people to understand the relational meaning of the (second) sentence (above), 'She (Amy) has one candy less than Mary.', the sentence has to be recast to read, 'Mary has one more candy than Amy.'* [a.a.O., 129]. Von Kindern wird die additive Beschreibung der Relation bevorzugt, aber nicht alle Kinder schaffen die Umkodierung in eine additive Beschreibung, was zur Folge hat, dass sie die Situation nicht richtig verstehen.

Weiterführende oder strukturelle Zahlaspekte

Bei den weiterführenden Zahlaspekten geht es um die Regeln für den Umgang mit Zahlen (Verknüpfungen, Operationen, Algorithmen, …). Zu diesen weiterführenden Zahlaspekten kann man den Operatoraspekt und den Rechenzahlaspekt (algebraischer und algorithmischer Aspekt) zählen. Durch Operationen mit Zahlen werden neue Zahlen erzeugt. Damit dies in der Grundschule immer funktioniert, müssen bestimmte Regeln beachtet werden (z.B. Verbot der Division durch Null, der Subtrahend muss kleiner als der Minuend sein, usw.). Die weiterführenden Zahlaspekte greifen auf die grundlegenden zurück, um die Operationen anschaulich zu erklären und einzuführen. So können z.B. Aktivitäten unter dem Operatoraspekt mit Mengen (Kardinalzahlaspekt) mit Längen (Maßzahlaspekt) oder auch auf der Zählzahlreihe (Ordinaler Aspekt) durchgeführt werden:

- Operatoraspekt mit Mengen: Maschinenmodelle z.B. 'für 1 gib 4'-Maschine oder *3-Maschine (siehe [LAUTER 1991, 111,103]).
- Operatoraspekt mit Längen: Sprünge auf dem Zahlenstrahl wie z.B. beim Einmaleins-Plan (siehe [MÜLLER/WITTMANN 1990, 114ff.]).
- Operatoraspekt mit Zählzahlen: Zählen in größeren Schritten wie z.B. beim Aufsagen der Einmaleins-Reihen oder in der Einmaleins-Tafel (siehe [MÜLLER/WITTMANN 1990, 119ff.]).

Der oft auch noch genannte Kodierungsaspekt, s.o., der zur Bezeichnung und Unterscheidung von Objekten dient, wird im Mathematikunterricht der Grundschule ausgeblendet. Die Benennung von Dingen durch Namen im Arithmetikunterricht wird kaum thematisiert, da es keinen Sinn macht, mit Kodierungen, wie z.B. Telefonnummern oder Hausnummern, zu rechnen.

Aspekte des Zahlbegriffs

Zahlaspekte		Beschreibung	Beispiele	Zusammenhänge
Grundlegende Zahlaspekte	**Kardinal-zahlaspekt**	Zahlen beschreiben die Mächtigkeit von Mengen, die *Anzahl* von Elementen einer Menge	3 Äpfel, 5 Gongschläge, 9 Zahlen, 10^{13} Möglichkeiten	Bestimmen der Mächtigkeit durch Subitizing oder Zählen; Verwendung strukturierter Mengen (5er/10er Struktur);
	Ordinalzahl-aspekt	*Zählzahl*: Folge der nat. Zahlen, die beim Zählen durchlaufen werden.	'eins, zwei, drei, vier, ...' 'zehn, neun, acht, ...'	Herstellung der Zahlenreihe durch Zählprinzipien auf unterschiedlichen Niveaus; Anwendung der Zahlenreihe z.B. auf Mengen usw.
		Ordnungszahl: Rangplatz in einer geordneten Reihe	'Ich bin der Fünfte im Wartezimmer'	Vorhandene, geordnete Objekte werden bezeichnet
	Maßzahl-aspekt	Maßzahlen für Größen	10 Minuten 2 Meter 5 Euro	Als Maßzahlen von Längen; Problem der Skalierung (der Einheit); Problem der Punkte oder Strecken am Zahlenstrahl
Relationen		Mengen Längen Zähl-/Ordnungsz.	...hat mehr Elem... ...ist länger... ...ist Nachfolger...	Anwendung:Äquivalenzrelation, dann Ordnungsrelation; Vergleiche durch Zählen
Weiterführende Zahlaspekte	**Operator-aspekt**	Bezeichnung der Vielfachheit einer Handlung oder eines Vorgangs	Noch fünfmal schlafen bis zu den Ferien	Erweiterung der grundlegenden Zahlaspekte; Zahlen als Relationalzahlen; Erzeugung neuer nat. Zahlen durch Operationen; Beziehungen zwischen den Operationen (Gesetze); Grenzen der Operationen;
	Rechenzahlaspekt	*Algebraischer Aspekt*: (**N**,+),(**N**,*) sind algebraische Strukturen (mit bestimmten Eigenschaften)	36+(17+4)= (36+4)+17 Kommutativität / Assoziativität 23*27=625-4 $(a-b)*(a+b)=a^2-b^2$	
		Algorithmischer Aspekt: Rechnen als 'Ziffernmanipulation' nach festgelegten Regeln	$\begin{array}{r} 629 \\ \underline{+563} \\ 1191 \end{array}$	Rechnen mit Ziffern (schriftliche Rechenverfahren) statt Rechnen mit Zahlen (halbschriftliche Strategien)
Kodierungs-aspekt		Bezeichnung von Objekten	33501 Bielefeld, Tel. 428383704, PPC 4600	(macht keinen Sinn)

Tab. 1.02: Aspekte des Zahlbegriffs - neue Gliederung

Wenn man nun die Aspekte aus der Tabelle von KRAUTHAUSEN/SCHERER (s.o. 1.01) nach der neu entwickelten Struktur anordnet und die Operationen zunächst ausblendet, dann erhält man die obige, vorläufige Tabelle 1.02., die sicher noch weiterentwickelt werden müsste, die aber zunächst als Arbeitsgrundlage dienen soll.

Die Zahlaspekte sind in Tab. 1.02 tabellarisch geordnet, obwohl sich eine Darstellung in einem Netzbild (wie z.B. in Abb.1.0.2) wohl eher anbieten würde. Durch die Darstellung in der Tabelle ist es möglich, zunächst einmal die Bereiche der fundamentalen und weiterführenden Zahlaspekte zu trennen. Die Relationen, die zwischen diese beiden Blöcke der fundamentalen und der weiterführenden Zahlaspekte gestellt sind, sollte man sich als verbindendes Element zwischen den Einzelaspekten in den beiden Blöcken vorstellen und nicht als Verbindung nur zwischen dem Maßzahl- und dem Operatoraspekt. Relationen beschreiben auch keinen Zahlaspekt, sondern Beziehungen zwischen einzelnen Zahlen. Diese Beziehungen können über die grundlegenden Zahlaspekte begründet und veranschaulicht werden, wobei aber der Maßzahlaspekt (Längen) sicher der anschaulichste ist. Bevor man mit Zahlen Operationen durchführt, ist es sicher angebracht, zunächst den Blick von einzelnen Zahlen zu lösen und zwei oder mehrere Zahlen miteinander zu vergleichen.

Hinweise auf Operationen wurden bei den grundlegenden Zahlaspekten weggelassen, da dies den Rahmen der Tabelle sprengen würde und es zunächst nur darum geht, zu beschreiben was Zahlen sind oder wozu man sie braucht.

1.2.2 Ordinalzahlaspekt und die Peano-Axiome

Zählzahlen

Die unendliche Folge der Zählzahlen (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, …) wird auch als Menge der *natürlichen Zahlen* **N** bezeichnet. Das Wort *natürliche Zahl* weist auf das Wesen des Zählens als eine Tätigkeit hin, die derart unvermittelt einsichtig wirkt, dass wir sie nur beschreiben, nicht aber durch Einfacheres erklären können: Jedes Zählen beginnt mit der natürlichen Zahl **1 (Eins)** und schreitet von der natürlichen Zahl **n** zur um Eins vermehrten natürlichen Zahl n+1 oder **n′**, dem Nachfolger von n, fort. Auf diese Weise entsteht die nie endende Folge $\mathbf{1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 4 \mapsto \ldots \mapsto n \mapsto n' \mapsto \ldots}$ der natürlichen Zahlen. **N** sei die Menge dieser natürlichen Zahlen. In der Bezeichnung $\mathbf{n} \in \mathbf{N}$ bringen wir zum Ausdruck, dass **n** eine natürliche Zahl ist. Zusammen mit Operationen nennen wir **N** die *Arithmetik* oder das *System* der natürlichen Zahlen …(vgl. [TASCHNER 1991]). Es gelten folgende Regeln: Eins ist nicht Nachfolger einer anderen Zahl und keine Zahl wiederholt sich in der Folge der natürlichen Zahlen, also hat jede natürliche Zahl höchstens einen Vorgänger, Eins hat keinen und alle anderen haben genau einen Vorgänger. Die Zahl 1 ist gleichzeitig Ausgangspunkt für den Aufbau und Baustein für die natürlichen Zahlen. Indem man sie benutzt, kann man damit jede andere natürliche Zahl konstruieren. Kurz gefasst kann man schreiben:

P1: $\mathbf{1} \in \mathbf{N}$

P2: $f = \mathbf{n'}$ ist Fkt. auf $\mathbf{N}$

P3: $\mathbf{1} \notin f(\mathbf{N})$

P4: f ist injektiv

P5: $(\mathbf{1} \in M \subset \mathbf{N} \wedge f(M) \subset M) \rightarrow (M = \mathbf{N})$ für alle M

Dieses Fortschreiten, also die Abbildung 'Nachfolger' auf den natürlichen Zahlen, kann man sich auch als Vektoren vorstellen. Man beginnt am Zahlpunkt 1 und trägt dann Einheitsvektoren ab, um zu den anderen Zahlpunkten zu gelangen. Denkt man in Zahlpunkten und Vektoren, so ist ein Nullpunkt, der Zahlpunkt Null angemessen.

Für die Grundschule benutzt man gern die natürliche Zahlen einschließlich der Null, also $\mathbf{N}_0$. Im Axiomensystem geht man dann von der Zahl Null aus (z.B. in [BUTTERWORTH 1999, 396]). Hier werden einfach das erste und das dritte Axiom variiert: $0 \in \mathbf{N}_0$ (P1)* und 0 ist kein Nachfolger. Der erste Zahlpunkt ist dann 0 und der erste Vektor verbindet diesen mit dem Zahlpunkt 1 (s.u. Abb. 1.03).

Die didaktische Bedeutung der Peano-Axiome liegt sicher darin, dass sie nicht nur die natürlichen Zahlen $\mathbf{N}_0$ also den Zahlbereich, der die Zahlenräume der Grundschule abbildet, sondern auch das Vorwärtszählen (siehe unten 1.6) über die Nachfolgerbildung mathematisch beschreiben, es wird eine arithmetische Folge erster Ordnung erzeugt. Bei der doppelten Schrittweite $\mathbf{n} \mapsto \mathbf{n}''$ werden die geraden bzw. die ungeraden Zahlen erzeugt.

Das Axiomensystem erzeugt nur die Zahlen als solche, die Idee der Operationen mit diesen Zahlen muss aus dem Axiom (P2) hergeleitet werden. Operationen werden so auf das schrittweise Vorwärtsgehen oder Vorwärtszählen in Einerschritten begründet und damit auf eine Minimalstrategie. Auch DEVLIN schreibt z.B. bei der Diskussion der imaginären Zahlen: *'Vergessen Sie jedoch bitte nicht, daß es keine Rolle spielt was Zahlen sind; entscheidend ist vielmehr, wie* *sie sich verhalten.'* [Devlin 1990, 79]. Deshalb findet man für die natürlichen Zahlen auch Definitionen ausgehend vom Körper der reellen Zahlen, da man dann auch einen Teil der Operationen aus **R** mitbekommt. Summe und Produkt natürlicher Zahlen sind wieder natürliche Zahlen, Differenz und Quotient mit Einschränkungen. Auch Butterworth weist darauf hin, dass das Axiomensystem (s.o.) nicht einmal annähernd formal genug sei, um die natürlichen Zahlen zu beschreiben und erweitert es deshalb (siehe [Butterworth 1999, 397f.]).

Die Peano Axiome sind so allgemein, dass man damit auch Bierdeckelzahlen erzeugen könnte, wenn man als Startzahl | nimmt. Das Zeichen | hat dann dieselbe Bedeutung wie die Ziffer 1. Ein System von Regeln, nach den Vorstellungen der konstruktivistischen Grundlagen-Mathematik, zum Aufbau der Arithmetik aus | findet man bei Lorenzen [1962, 50ff.].

Die Peano-Axiome erklären die Semantik der natürlichen Zahlen, die Ziffernfolge, aber nicht deren Syntax, also die Bildung der Zahlworte. Sie erklären nicht, wie die natürlichen Zahlen in ihrer Notation und Sprechweise aufgebaut sind. Dieses Problem der Syntax kann man aber leicht mit informatischen Beschreibungsmustern lösen. Eine Beschreibung im Dezimalsystem in einer kontextfreien Grammatik mittels Backus-Naur-Notation (BNF) könnte wie folgt aussehen:

<P-Ziffer> ::= 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9

<Ziffer> ::= 0 | <P-Ziffer>

<Ziffernfolge> ::= <Ziffer> | <Ziffernfolge> <Ziffer>

<natürliche Zahl> ::= <Ziffer> | <P-Ziffer> <Ziffernfolge>

(vgl. [Bronstein/Semendjajew 1987, 116]).

Damit können nun alle möglichen natürlichen Zahlen als Ziffernfolgen produziert werden. Die richtige Reihenfolge ergibt sich über die Peano-Axiome.

Die Ausführungen haben sicher deutlich gemacht, dass der mathematische Zugang zu den natürlichen Zahlen über die Peano Axiome für deren Verständnis nur bedingt tauglich ist. Dieser Zugang macht außerdem keine Aussage darüber, wie die Zahlwortreihe syntaktisch aufgebaut ist. Die Zählzahlen existieren als rein mathematische Objekte, die mittels der Axiome in eine Ordnung gebracht werden. Die Zählzahlen, sowie Zahlpunkte oder Einheitsvektoren zwischen den Zahlpunkten müssen erst im Akt des Abzählens repräsentiert, also an Zahlobjekte gebunden werden.

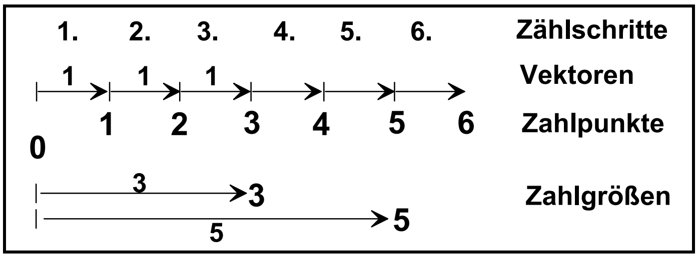


Abb. 1.03: Zahlen als Punkte, Größen und Vektoren

Die Zusammenhänge zwischen Punkten und Vektoren sind in Abb. 1.03 noch einmal dargestellt. Die Zahl 5 ist der Zahlpunkt, auf den der 5. Einheitsvektor zeigt, aber sie ist gleichzeitig auch die Zahl, auf die der Ortsvektor der Länge 5 zeigt.

Ordnungszahlen

Die zweite Variante des Ordinalzahlaspekts, die Ordnungszahl als Rangplatz in einer geordneten Reihe, stellt man sich eher als das Resultat einer Relation auf einer Menge von Zahlen vor. Die Ordnungszahlen entstehen nicht wie die Zählzahlen aufzählend, sondern sie sind da und werden auf eine Ordnung angewendet bzw. einer geordneten Objektmenge zugeordnet. Damit ist natürlich nicht das 'Prinzip der stabilen Ordnung' beim Zählen (siehe [GELMAN/GALLISTEL 1978, 203ff.]) gemeint, das ja nur besagt, dass Kinder die Zahlwortreihe richtig aufsagen können. Ordnungszahlen sind viel stärker als die Zählzahlen an irgendwelche Objekte gebunden und an eine Relationsvorschrift, die die Ordnung auf diesen Objekten beschreibt. Dies zeigt sich auch in der Schreibweise, hier sind die Ordnungszahlen Substantive : eins, zwei, ... aber Erster, Zweiter, ... Die Unterscheidung zwischen Ordnungszahl und Zählzahl weist eben auch sprachlich auf unterschiedliche Kontexte hin. Ordnungszahlen werden gebraucht, um eine vorhandene Ordnung zu benennen. Wenn man mit Hilfe von Zählzahlen eine Menge abzählen möchte, so kann diese ungeordnet sein. Es empfiehlt sich aber, eine Ordnung herzustellen, damit man leichter zählen kann. Ein mathematische Herleitung der Ordnungszahlen ausgehend von geordneten über wohlgeordnete Mengen und deren Ordnungszahlen findet man z.B. bei KAMKE [1955, 79ff]. Geordnete Mengen erhält man, falls man eine Ordnungsaussage auf deren Elemente anwenden kann. Für zwei verschiedene Elemente a und b gilt dann entweder a 'vor' b oder b 'vor' a. Außerdem gilt die Transitivität: aus a 'vor' b und b 'vor' c folgt a 'vor' c. Wohlgeordnete Mengen sind geordnete Mengen, die ein erstes Element besitzen [a.a.O., 110]. Unter einer Ordnungszahl versteht man einen Ordnungstypus, der durch wohlgeordnete Mengen repräsentiert wird.

Ein Ordnungstypus ist ein beliebiger Repräsentant M aus einer Klasse von zueinander ähnlichen geordneten Mengen.

1.2.3 Von Aussagen über Mengen zu Kardinalzahlen

Durch Abstraktion zu Kardinalzahlen

Wer Zahlen als Kardinalzahlen erhalten will, muss die Bildung von Objektkollektionen (Mengen), deren Elementzahl durch ein Zahlwort bzw. ein Zahlzeichen beschrieben wird, erklären. Es gilt also mehrere Fragen zu beantworten:

Wie gelangt man zu Mengen, von diesen zu deren Anzahlen und dann zu deren Bezeichnung?

Objekte $\xrightarrow{\textbf{1.?}}$ **Mengen** $\xrightarrow{\textbf{2.?}}$ **Anzahlen** $\xrightarrow{\textbf{3.?}}$ **Bezeichung gleicher Anzahlen**

Abb. 1.04: Kardinalzahl als Abstraktion

Zum **1.** Schritt, der Bildung von Mengen gibt es 2 Möglichkeiten:

- über Aussagen und Aussageformen zu Mengen
  Aussagen über Dinge ermöglichen ein Urteil (wahr oder falsch) und sind wie einfache Sätze gebaut, nämlich aus Subjekt und Prädikat. Die Mengenbildung erreicht man nun durch eine sinnvolle Aussageform P über einen fest gewählten Grundbereich von Objekten. Die Menge wird von den x aus dem Grundbereich gebildet, für die P(x) eine wahre Aussage ist.
- über den naiven Mengenbegriff (Cantor)
  Eine Menge erhält man als Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte zu einem Ganzen. Die Menge entsteht als Zusammenfassung ganz konkreter (manuell greifbarer) Objekte.

Beim **2.** Schritt, muss geklärt werden, ob es eine spezielle Beziehung (Bijektion) zwischen Mengen gibt, die einen quantitativen Vergleich ermöglicht. Damit gelangt man über die Spezialisierung von Relationen zu Äquivalenzrelationen.

Der **3.** Schritt auf dem Weg zu den natürlichen Zahlen ist nun die Zusammenfassung von gleichmächtigen Mengen zu Äquivalenzklassen und einer Abstraktion bei deren Bezeichnung. Die Kardinalzahl, oder Mächtigkeit einer Menge, ist jene Eigenschaft, die sie mit allen zu ihr äquivalenten Mengen gemeinsam hat. Diese Eigenschaft wird mit einer Zahl bezeichnet z.B.: 3 als

Name der Äquivalenzklasse aller Dreiermengen. Die Äquivalenzklasse kann dann durch eine Dreiermenge repräsentiert werden.

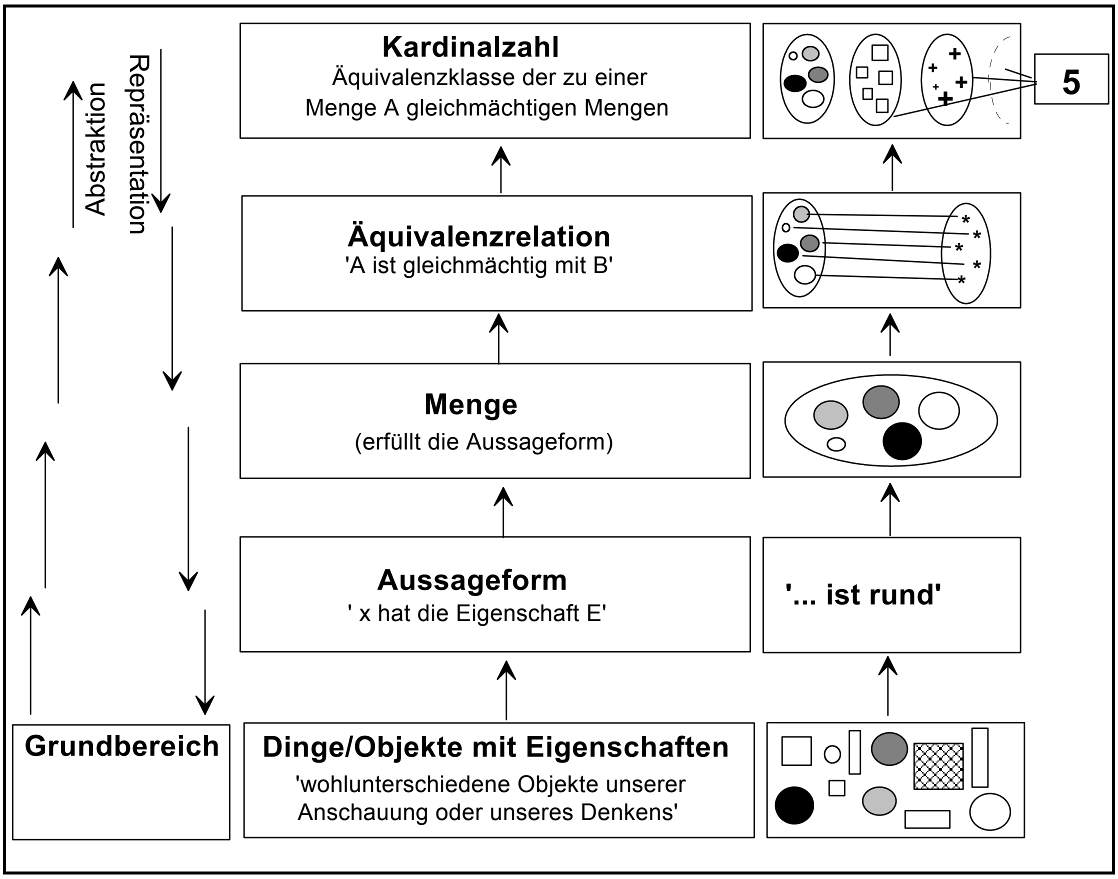


Abb. 1.05: Vom Objekt zur Kardinalzahl

Um von konkreten Objekten bis zum Abstraktum der Kardinalzahl zu gelangen sind wie oben beschrieben viele Abstraktionsschritte nötig. Die konkrete unterrichtliche Umsetzung über verschiedene sprachlich begleitete Handlungen mit Mengen ist selbst vielen Lehrkräften nicht völlig klar. Die Erkenntnis der Kardinalzahl ergibt sich im Unterricht dann eher zufällig. FREUDENTHAL [1973, 178] weist allerdings zurecht darauf hin, dass Begriffe wie Kardinalzahl und Mächtigkeit von Kindern vor allem über die Zählzahl erworben werden: *'Das Kind erwirbt sich die Zählzahl und konstatiert in einem gewissen Augenblick ihre Invarianz bei eineindeutigen Abbildungen (z.B. Permutationen); es konstruiert nicht die einzelne Zahl - auch nicht unbewußt - als Klasse der untereinander äquivalenten Mengen'... Die Invarianz bei eineindeutigen Abbildungen ist ein kleines Eckchen in diesem Komplex, eine Marotte der Erwachsenen, die sie als Mächtigkeitsaspekt anpreisen'.*

Unterrichtliche Konsequenzen

Bei der Einführung der Zahlen als Kardinalzahlen können allerdings nur sehr kleine Zahlen über Mengen direkt erarbeitet werden. Sobald die Anzahl der Elemente größer wird und die Menge nicht mehr simultan erkannt werden kann, muss der Schüler über Zählfertigkeiten verfügen. Dies war wohl der Grund, warum man früher einen eher schrittweisen Zugang bei der Erarbeitung des Zahlenraums wählte. Heute weiß man, dass die meisten Schüler aber schon beachtliche Zählfertigkeiten mitbringen, so dass man einen ganzheitlichen Einstieg, auch mit größeren, strukturierten Mengen machen kann. Die bei einigen Schülern noch nicht weit entwickelten Zählfertigkeiten müssen dann parallel zum Arbeiten mit größeren Mengen ausgebaut werden. Mengen erkennen, also das Verstehen von Kardinalität und Zählfertigkeiten erfordern aber unterschiedliche Kompetenzen (s.u. 1.3.2) und müssen sich nicht bedingen. Zur Erleichterung des Anzahlerkennens bzw. Zählens arbeitet man deshalb mit strukturierten Mengen (vgl. [MÜLLER/WITTMANN 1990, 23ff.]).

Für den Unterricht ergeben sich aus den vorher gemachten Ausführungen folgende Konsequenzen:

- Bei allen Mengenbildungen über Aussageformen ist eine genaue, häufig formale Sprache wichtig. Es sollten immer auch Elemente übrigbleiben, die die Aussageform nicht erfüllen.
- Bei Mengenbildungen über Aussageformen entstehen häufig Mengen, deren Elemente gleich aussehen. Dies führt bei manchen Kindern zu der falschen Vorstellung, Mengen dürfen immer nur gleiche Elemente (z.B. nur rote runde Plättchen) enthalten.
- Äquivalenzrelationen in einer Mengenmenge können nur zwischen mindestens zwei, noch besser aber zwischen vielen Teilmengen ausgeführt werden - erst dann kann man wirklich Klassen bilden bzw. die gemeinsame Zahleigenschaft der Teilmengen erkennen.
- Eine Kardinalzahl wird zwar immer zu einer Menge geschrieben, aber diese Menge steht stellvertretend für alle dazu gleichmächtigen Mengen, weshalb immer mehrere Objektmengen gebildet werden sollten, damit dann die gemeinsame Eigenschaft der Klasse erkannt wird. Dieses Problem der Repräsentierung existiert genauso im Bereich der Größen und bei geometrischen Objekten.
- Zählfähigkeit und kardinales Verständnis müssen parallel aufgebaut werden. Um die Mächtigkeit größerer endlicher Mengen zu benennen, ist

Zählfähigkeit Bedingung, sie wird aber durch diesen Zählvorgang nicht automatisch geschult.

Dadurch, dass sich Anzahlen sehr gut über Mengen veranschaulichen lassen, entsteht möglicherweise die Vorstellung, dass Operationen mit Mengen einfach sind und dass sich der gesamte arithmetische Anfangsunterricht sehr gut über Mengenhandlungen und Mengendarstellungen bewältigt werden kann. Dass dies nicht so ist, zeigen die folgenden zwei Beispielbilder von Schülerarbeiten aus einer 1. Klasse.

Die Kinder waren aufgefordert, nach Einführung von Addition und Subtraktion Bilder zu den beiden Aufgaben 4 + 5 = __ und 7 - 3 = __ anzufertigen. Bei ersten Operationen mit Zahlen kann es nach Einführung der Addition, die über Handlungen mit disjunkten Mengen sehr gut eingeführt werden kann, bei der Subtraktion zu Fehlvorstellungen kommen. Auch die Subtraktion wird mit zwei disjunkten Mengen dargestellt, es wird addiert statt subtrahiert. Die subtraktiven Handlungen des 'Wegnehmens' oder 'Abstreichens' wird nicht in die entsprechende ikonische Darstellung übertragen.

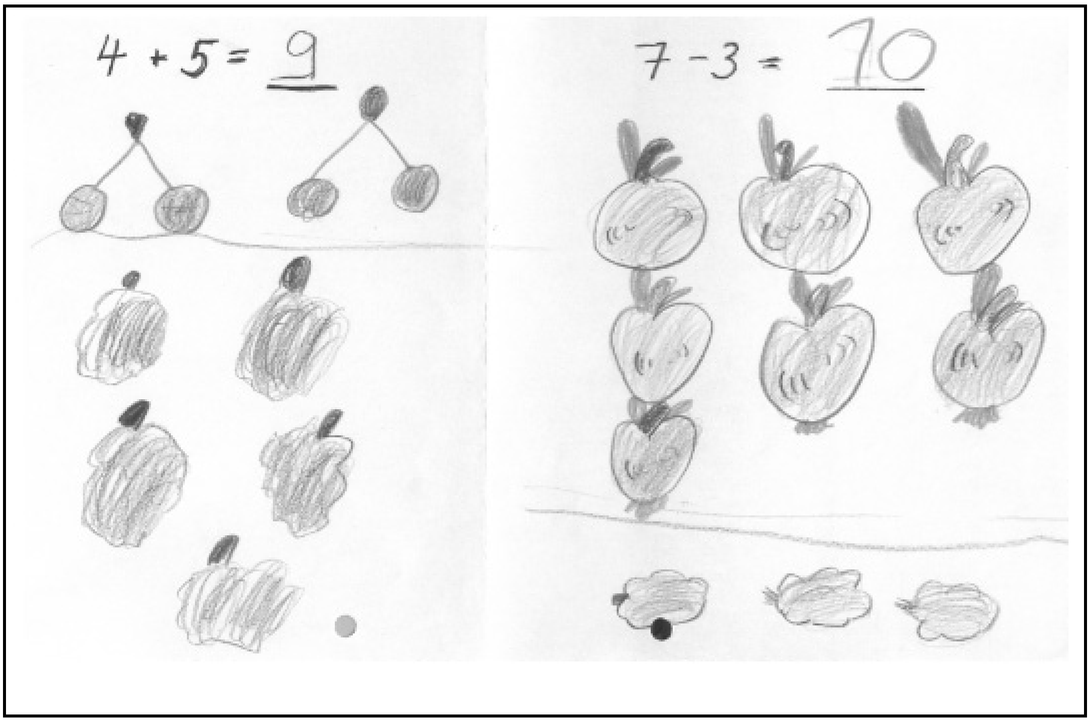


Abb. 1.06: Mengenvorstellungen zu Addition und Subtraktion

Wie man oben in Abb. 1.06 sieht, hilft hier die Vorstellung der Vereinigung disjunkter Mengen nicht weiter, sondern kann zu falschen Ergebnissen führen. Die Kinder gehen wie bei der Addition davon aus, dass Minuend und

Subtrahend jeweils durch eine Menge repräsentiert sein müssen. Dass der Subtrahend Teilmenge des Minuenden sein muss ist nur wenigen klar.

Selbst nachdem das Wegnehmen von Objekten und das Abstreichen im Bild gezeigt und durchgeführt worden war (Abb.1.07.), gab es immer noch Kinder, die sich nicht von der Vorstellung disjunkter Mengen lösen konnten.

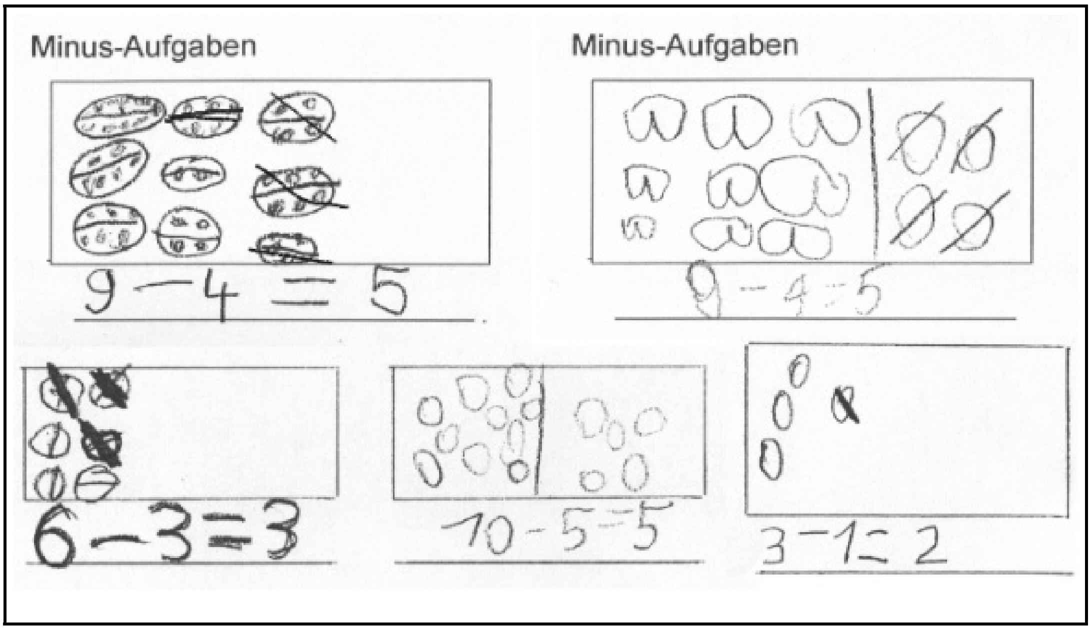


Abb. 1.07: Fehlerhafte Mengendarstellungen der Subtraktion

Dies könnte in den vielen Handlungen mit disjunkten Mengen und Darstellungen zur Mengenvereinigung begründet sein, mit denen die Schüler bei der Einführung der Zahlen und bei den ersten Operationen mit Zahlen geübt haben. Teilmengenbildungen, als Umkehrung der Mengenvereinigung, die für das Verstehen der Subtraktion wichtig wären, kommen im Mathematikunterricht bis zu diesem Zeitpunkt höchst selten vor, obwohl Kinder in ihrer Alltagsmathematik diese Bildungen sicher vornehmen. Dass Schüler solche falschen Vorstellungen haben, fällt aber meist gar nicht auf, da sie durch Zählen trotzdem zum richtigen Ergebnis kommen können.

Statt die Addition nur über die Vereinigung disjunkter Mengen einzuführen, wären auch Operationen auf nur einer Menge möglich, die um Elemente ergänzt oder vermindert wird, also das, was NUNEZ/LAKOFF [2000] (s.u.) unter der Metapherngruppe 'Arithmetik als Objektkonstruktion' beschreiben. Diese Repräsentation würde dann zunächst auch besser zur Lösungsstrategie der Schüler passen, die in der Mehrzahl ihre Lösungen durch Vorwärts- bzw. Rückwärtszählen finden.

1.2.4 Der Größenbereich Längen, natürliche Zahlen als Maßzahlen

Der dritte grundlegende Zahlaspekt beschreibt Zahlen in ihrer Verwendung als Maßzahlen für Größen. Da im arithmetischen Anfangsunterricht Zahlen unter anderem als Zahlen am Zahlenstrahl, auf der Zwanzigerreihe und im Zwanzigerfeld (2*10), also eher durch Längenrepräsentierungen veranschaulicht werden, beschränke ich mich mit meinen Ausführungen hier auf den Größenbereich Längen. Auch bei der Herstellung von Skalen spielen Maßzahlen eine Rolle, weshalb man dann vom Skalenaspekt der natürlichen Zahlen spricht. Beim Größenvergleich oder beim Messen spielt dann aber nicht nur der Maßzahlaspekt eine Rolle sondern auch der Operatoraspekt und außerdem sofort die Trichotomieeigenschaft (vgl. [Maier 1990, 25f.]). Vektoriell betrachtet beschreibt der Maßzahlaspekt eher Ortsvektoren. Falls deren Beträge dann ganzzahlig sind, repräsentieren diese natürliche Zahlen.

Mathematische Struktur eines Größenbereichs

Alle Größenbereiche, nicht nur die Längen, sondern auch Gewichte, Geldwerte, u.a. werden immer über Mengen konkreter Repräsentanten (Stäbe, Gewichtsstücke, Geldstücke/-scheine) eingeführt, die dann durch Äquivalenzrelationen (deckungsgleich, gleichschwer, wertgleich, ...) in Klassen eingeteilt werden. Im folgenden Unterricht werden dann, wieder unter Rückgriff auf geeignete Repräsentanten, die Kleinerrelation zwischen Größen und verschiedene Verknüpfungen (Vervielfachen, Addition, Aufteilen, etc.) eingeführt. Abstrahiert und unabhängig von Repräsentanten wird festgelegt, was unter einem Größenbereich zu verstehen ist.

Eine Menge G in der eine Verknüpfung + und eine Relation < erklärt sind, heißt ein Größenbereich $(G,+,<)$ wenn folgende drei Axiome erfüllt sind:

- G1: $(G,+)$ ist eine kommutative Halbgruppe,
- G2: $(G,<)$ ist eine strenge Ordnungsstruktur mit Trichotomieeigenschaft und
- G3: Für alle $a,b \in G$ gilt: es gibt ein $x \in G$ so dass $a+x=b$, g.d.w. $a < b$

Manche Größenbereiche haben außerdem noch Teilbarkeits- und Kommensurabilitätseigenschaft (vgl. [Griesel 1973, 56ff.]). $(\mathbf{N},+,<)$ ist ein Größenbereich, aber $(\mathbf{N}_0,+,<)$ ist wegen G3 natürlich kein Größenbereich. Falls man also Zahlen über Längenrepräsentanten einführt, dann hat man damit nicht nur Repräsentanten (z.B. Cuisenaire Stäbe) für die natürlichen Zahlen (außer der Null), sondern bekommt auch gleich einen Handlungsbereich in dem die Addition, die Kleiner-Relation sowie das Kommutativ- und Assoziativgesetz per Definition enthalten sind. Wie beim kardinalen Aspekt, so gibt es auch hier wieder eine Hierarchie von Repräsentierungs- und Abstraktionsprozessen, die aber bedeutend flacher, als bei der Herleitung der natürlichen Zahlen aus Mengen ist und direkt zur Abstraktion bzw. Repräsentation führt.

Die so repräsentierten natürlichen Zahlen sind dann auch gleichzeitig Maßzahlen und Relationszahlen (s.u.). Ein Problem ist natürlich die Anbindung der natürlichen Zahlen an die entsprechenden Längen, da man die Längen ja zunächst messen oder, unter Bezug auf eine Einheitsgröße, zumindest abschätzen müsste, um die Maßzahl zu bestimmen. Beim Cuisenaire-Material behilft man sich mit verschiedenen Farben als Merkhilfe, beim Mehrsystemmaterial verwendet man verschiedene Objekte (Einerwürfel, Zehnerstange, Hunderterplatte, ...), aus denen dann die Größen (Längen, Flächeninhalte und Volumina) und damit die Zahlen aufgebaut werden. Die Einheit wird jeweils durch ein Einerobjekt vorgegeben (vgl. [SCHMIDT/WEISER 1986]).

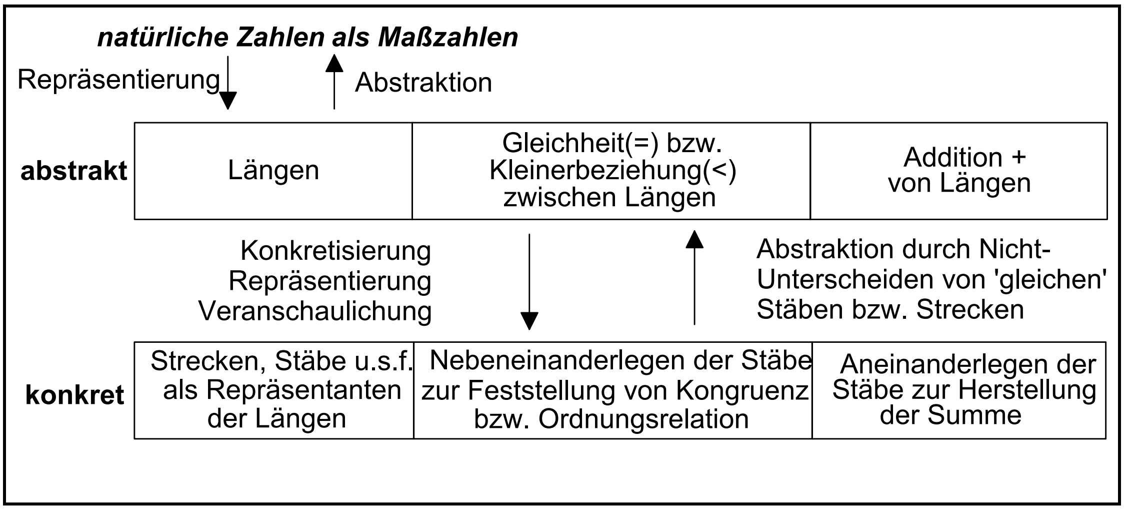


Abb. 1.08: Schichtenmodell (nach: [NÜHRENBÖRGER 2002, 13])

Mathematisch ist die Anbindung von **N** an G relativ einfach, sie erfolgt über die Definition des Skalenbereichs (vgl. [GRIESEL 1974, 11ff.]). Jeder Größenbereich G ist ein Skalenbereich, der sich selbst als zugeordneten Größenbereich hat. Die Menge **N** selbst ist ein diskreter Skalenbereich. Die Ordinalzahlen sind dann die Koordinaten eines diskreten Skalenbereichs mit minimalem Element.

Arbeitsmittel und Größenvorstellung

Die Überlegungen zum Maßzahlaspekt und damit die Idee, den Zugang zu den natürlichen Zahlen über Längen zu veranschaulichen, ist natürlich nicht neu. So geht Haase (Herman Haase 1906, Haase'sche Rechenlatte und Stabreihe) davon aus, dass für den Zahlbegriff die Maßzahl bzw. der Operator die zentrale Rolle spielt. *'Als Voraussetzungen für Zahlvorstellungen nennt er:*

- *das Vorhandensein einer Reihe, bestehend aus gleichen Gliedern*
- *ein ausgezeichnetes Objekt*
- *den Vorgang des Ausmessens der vorhandenen Reihe mit dem ausgezeichneten Objekt*
- *die Feststellung der Anzahl der Messvorgänge.*' [nach RADATZ/SCHIPPER 1983, 38].

Im Unterricht wird dann eine Anzahl von Objekten, also eine Menge, vor die Rechenlatte gestellt, die Objekte werden mit Ordinalzahlwörtern benannt und den Strichen auf der Rechenlatte zugeordnet oder auf die Stabreihe gesteckt. Das Ergebnis kann man dann auf der Rechenlatte oder der Stabreihe ablesen. Es wird also nur mit Rangplätzen auf den beiden zahlenstrahlähnlichen Materialien gearbeitet, *'wobei die Erarbeitung des Zahlbegriffs und das Rechnen mit Zahlen weitgehend auf das Zählen zurückgeführt wurde.'* [a.a.O., 59].

Dies ist auch eines der Hauptprobleme beim Verständnis des Zahlenstrahls. Wird er unter ordinalen Gesichtspunkten verwendet, dann macht es Sinn, die natürlichen Zahlen an den Markierungen anzuordnen, sie sind dann Punkte auf dem Zahlenstrahl. Das ist, wie sich später, wenn die rationalen Zahlen eingeführt werden, herausstellt, ja auch korrekt. Andererseits, wenn Zahlen durch Längen oder Mengenelemente repräsentiert werden sollen, dann entsprechen den Zahlen aber gerade die Strecken zwischen den Markierungen. Es sind auch hier wieder die Betrachtungsweisen Zahlpunkte vs. Vektoren zwischen den Zahlpunkten, die für Verwirrung sorgen. LORENZ spricht hier vom *'Dilemma ordinaler vs. kardinaler Zahlaspekte'* [1992, 152ff.]. Dieses Dilemma lässt sich aber elegant auflösen, wenn man auf Körpermetaphern übergeht, wie wir unten (2.3) sehen werden.

Ein anderes Problem, das der Skalierung, tritt sofort auf, wenn Längenaspekte eine Rolle spielen. Generell gilt es zu verstehen, *'dass die Gesamtlänge von der Summe der Intervalle gebildet wird, die jedes Element vom folgenden trennen, und daß ... bei einer dichten oder gedrängten Reihe die Intervalle zahlreicher und kürzer sind, während bei einer weniger dichten Reihe die Gesamtlänge dieselbe bleiben kann, indes die Intervalle weniger zahlreich und länger sind'* [PIAGET/SZEMINSKA 1975a, 105]. Dabei muss aus dem Verhältnis der Gesamtlänge zur Anzahl der 'Intervalle' bzw. zu einer Teillänge auf die Einheitslänge geschlossen werden. Dasselbe Problem taucht auch im Unterricht auf, wenn man bei Zahlenraumerweiterungen verschieden skalierte Ausschnitte des Zahlenstrahls benutzt.

Steckwürfeltürme, Würfelschlangen und eingeschränkt auch Rechenketten werden meist ordinal interpretiert, da sie aus Einzelobjekten aufgebaut sind und man bei Operationen mit diesen Arbeitsmitteln Einzelobjekte manipuliert. Längenaspekte bei Handlungen an diesen Arbeitsmitteln spielen bei Relationen sowie beim Verdoppeln, Halbieren, Vervielfachen und Aufteilen eine Rolle, wo natürlich nicht gezählt, sondern das Resultat zunächst grob über die Länge hergestellt wird. Außerdem wird bei der Arbeit mit Würfeltürmen und Würfelschlangen das Relationszahlverständnis aufgebaut, da man alle möglichen Zerlegungen eines Würfelturms leicht herstellen kann.

Cuisenaire-Stäbe sollen Relationen zwischen Zahlen repräsentieren. Das ist aber erst dann möglich, wenn mit den einzelnen Stabtypen Zahlen verknüpft sind, da ja alle Handlungen mit den Stäben auch zahlfrei durchgeführt werden können: 'Ein hellgrüner Stab ist halb so lang wie ein dunkelgrüner'. Die Beziehung wird zunächst durch die Stäbe repräsentiert, muss dann aber davon abstrahiert und auf die Relationszahlebene gebracht werden. *'Die Beziehung selbst muß durch einen konstruktiven Akt vom Schüler selbst hergestellt werden'* [LORENZ 1992, 163].

An den wenigen Beispielen sollte schon deutlich geworden sein, dass beim Übergang zu Relationszahlen Längenaspekte die entscheidende Rolle spielen, weil man damit Relationen unmittelbar erfassen kann. Längendarstellungen zur Quantifizierung sind dem Kind sofort zugänglich, quasi auf einen Blick. BAROODY beschreibt z.B. ein 'Nimm-Spiel' mit Klötzchen, bei dem die Spieler ihre Anzahlen dadurch vergleichen, dass sie die Klötzchen in den Ecken eines Kartons linear anordnen: *'The row of blocks that is shorter has less. Note that this method ties the term less to the perceptual cue of length (appearances). Later, children can be encouraged to count each set of blocks and use their mental representation of the number sequence to determine the set with fewer.'* [1992b, 323].

1.2.5 Übergänge zur Relationszahl

Die Anwendung von Relationen ist eine der Möglichkeiten, mit denen Kinder versuchen, mehr über Zahlen herauszufinden, Beziehungen und Zusammenhänge zwischen Zahlen zu beschreiben und Situationen des täglichen Lebens, in denen Zahlen vorkommen, zu strukturieren und zu verstehen. Ohne

Relationen ist ein flexibler Umgang, also ein 'Spiel mit Zahlen', nicht denkbar. *'We contend that three kinds of numerical reasonning principles are available to the young child: relations, operations, and principles of 'reversibility'.'* [GELMAN/GALLISTEL 1978, 162]. Von den möglichen Relationen werden Kinder zunächst die Äquivalenz untersuchen. Dies kann entweder durch eins-zu-eins Korrespondenz oder, und das machen Kinder lieber, durch Abzählen geschehen: Zwei Mengen sind gleich, wenn sie beim Abzählen dasselbe Zahlwort bzw. dieselbe Zahlwortreihe erzeugen. *'The preschooler's normal principle for determining whether two sets are numerically equal is 'Count them and see.' Two sets have equal numerosity if, when counted these both yield the same cardinal numeron.'* [a.a.O., 198]. Falls keine Äquivalenz festgestellt werden kann, wird versucht eine Ordnung herzustellen: *'...the young child recognizes that, if two numerosities x and y do not satisfy the equivalence relation x=y, then they satisfy an ordering relation > such that either x>y or y<x.'* [a.a.O., 166]. Dieser Relationszusammenhang, den wir bei Größen als Trichotomieeigenschaft wiederfinden, ist ausreichend, damit Kinder sicher mit verschiedenen Anzahlen handeln können. Es wird auch deutlich, dass die Kinder, schon lange vor den Operationen Addition und Subtraktion, über Fähigkeiten zu Handlungen mit mehreren Mengen bzw. Zahlen verfügen, die dann auch für diese Operationen grundlegend sind. Sogar Vorstellungen von 'ist doppelt so groß', 'ist halb so groß', 'ist Vielfaches von' oder 'ist ... mal enthalten' sind bei vielen Kindern schon entwickelt, bevor sie in die Schule kommen (vgl. [SOPHIAN 1992, 19ff.]). Auf dieses Vorwissen wird aber nicht zurückgegriffen: *'I believe, teachers can promote sensemaking by taking care to give children an opportunity to validate new problem-solving methods against familiar ones.'* [a.a.O., 40]. Dieses Vorwissen, das über die Bezeichung der Mächtigkeit einer Menge durch eine Zahl hinausgeht, wird auch als Teil-Ganzes-Schema bezeichnet. Das Teil-Ganzes-Schema beinhaltet das Wissen über die Zusammensetzung von Zahlen aus anderen Zahlen und ein Zahlverständnis über den Kardinal- und Ordinalzahlaspekt hinaus. Es *'stellt eine Wissensstruktur dar, in der die Beziehung zwischen Zahlen in flexibler Weise repräsentiert ist'* [STERN 1998, 76]. STERN verwendet die Bezeichnungen Relationszahlverständnis und Relationszahlprinzip. 8 ist ein anderer Name für 7 + 1. Hier ist die additive Darstellung eine Möglichkeit um Beziehungen zwischen Zahlen auszudrücken. Sie hat nicht das Ziel, ein Ergebnis zu erzeugen, wird also nicht als Operation verstanden. Relationszahlen beziehen sich im Gegensatz zu Kardinalzahlen nicht auf konkrete Mengen, sondern auf die Beziehungen zwischen Mengen. Die Relationszahlvorstellung ist also mehr, als das was man als 'primitives Operationsverständnis' bei Kardinalzahlen beschreiben könnte: *'Addition beschreibt, was ich tun muss um die*

Vergrößerung einer Menge zu erfassen, und Subtraktion beschreibt, was ich tun muss, um die Verkleinerung einer Menge zu erfassen.' [a.a.O.]. Mit diesen 'primitiven Operationen' wird nur die Mächtigkeit einer Menge manipuliert. Zahlen und Operationen können aber auch die *'Beziehung zwischen quantitativen Einheiten'* beschreiben, z.B. *'7 + 2 = 11 - 2'* oder *'7 ist ein anderer Name für 5 + 2.'* [a.a.O.], dann sprechen wir von Relationszahlen. Relationszahlen bilden die Grundlage für das Verständnis von dynamischen Situation und Operationen: *'Mit einer Relationszahl kann die Differenz (Peter hat 3 Murmeln weniger als Hans) oder die Proportion (Peter hat dreimal so viele Murmeln wie Hans) zwischen zwei Mengen beschrieben werden. In beiden Fällen handelt es sich bei der '3' nicht um eine Kardinalzahl, also um eine Zahl, die eine konkrete, existiernde Menge beschreibt, sondern um eine Relationszahl.'* [a.a.O., 77]. Erst dadurch wird ein flexibles Operieren mit Zahlen möglich und Zahlen werden damit in flexibler Weise mental repräsentiert (vgl. [FREUDENTHAL 1978, 162ff.]). Besonders Operationen am mentalen Zahlenstrahl sind nur sicher möglich, wenn die Kinder nicht mit Zählstrategien, sondern mit Relationszahlen operieren. Relationszahlen können mental aber nicht durch Mengen repräsentiert sein, sondern sie sind mit irgendwelchen räumlichen Vorstellungen (s.u. 1.3.3) verbunden.

1.2.6 Kritik der entwicklungspsychologischen Theorie des Mathematiklernens

Trotz offensichtlicher Schwächen des kardinal-ordinalen Zugangs zu Zahlen, hauptsächlich über Aktivitäten mit Mengen, wird er in den Schulen nach wie vor präferiert. Neuere Erkenntnisse zum Lernen haben nur rudimentär Einzug in die Schulen gehalten. Seit über 40 Jahren wurden und werden die Theorien Piagets, Aeblis und Bruners als grundlegend für die Prozesse beim Lernen von Mathematik angesehen und so auch mehreren Generationen von Lehrern vermittelt. Diese geballte Kraft der dreifachen Stufentheorien:

- Stufentheorie von PIAGET [1975b],
- Theorie der Verinnerlichung von AEBLI [1975],
- Theorie der Darstellungsebenen von BRUNER [1974],

hat dafür gesorgt, dass sich in den letzten Jahrzehnten eine bestimmte Ausprägung des Mathematikunterrichts durchgesetzt hat. Die entwicklungspsychologischen Theorien sind derart etabliert, dass sie bereits Teil des Mathematikunterrichts geworden sind. Deshalb werden diese Theorien auch hier beschrieben und nicht in Teil 1.3.

Nach Piagets Stufentheorie durchläuft das Kind verschiedene Entwicklungsstufen von der Sensomotorik über die prä-operationale und die konkret-operationale, bis es schließlich zu formal-abstraktem Denken auf der formal-operativen Stufe vordringt.

Nach Aeblis Theorie ist jede arithmetische Operation die Abstraktion einer Handlung, also eine 'verinnerlichte, abstrahierte Handlung'. In diesem Stufenmodell beschreibt Aebli, wie das Kind zum Verständnis einer abstrahierten Rechenoperation, ausgehend von der Handlung gelangt.

- Konkretes Handeln mit Gegenständen
- Bildliche Darstellung (mit graphischen Zeichen und Markierungshilfen)
- Symbolische Darstellung mit Ziffern und Zeichen
- Automatisierung der Operationen

Operatives Denken zeigt sich, wenn das Kind diese Stufen runter und rauf operieren kann.

Bruner schließlich unterscheidet verschiedene Darstellungsebenen zur Erschließung der Umwelt:

- die enaktive Darstellung (eigene Handlungen),
- die ikonische Darstellung (Bilder) und
- die symbolische Darstellung (Zeichen, Symbole und Sprache).

Übergänge innerhalb und zwischen den Ebenen (intramodaler und intermodaler Transfer) müssen gelernt und beherrscht werden. Flexibles, operatives Denken zeichnet sich dadurch aus, dass diese Übergänge mühelos gelingen.

Alle drei Theorien, mit ihren Stufenmodellen kommen natürlich der Vorstellung von Mathematik als deduktiver Wissenschaft entgegen und so wird sie auch auf der Grundlage dieser Theorien in der Schule gelehrt: Wissen wird schrittweise, meist in sehr kleinen Schritten, auf- und ausgebaut, wie im Spiralcurriculum des Mathematikunterrichts vorgesehen. Damit die Kinder bei ihrer Entwicklung nicht 'überfordert' werden, wird schrittweise lernzielorientiert vorgegangen, unter gleichzeitiger Beachtung der mathematischen Konsistenz, wie bei Piaget beschrieben. Häufig werden die Theorien dann auch noch fehlinterpretiert oder gleichgesetzt, also z.B: die Stufentheorie von Piaget und die Darstellungsebenen von Bruner (siehe [HOFMANN 2002, 25]). Die Fehlinterpretation äußert sich auch in so gut gemeinten Ratschlägen wie: Hat ein Kind Schwierigkeiten und macht Fehler, dann gehe man - als Rezept - in diesen Stufen zurück. Vor allem die Theorie Piagets hat dafür gesorgt, dass Kinder im mathematischen Anfangsunterricht systematisch unterfordert werden und dass die Hauptaktivitäten im Anfangsunterricht in Mengenoperationen bestehen. *'Piaget's findings have had a considerable impact on our education system. His conclusions have instilled a pessimistic attitude and a wait-and-see policia among educators. The theory states, that the regular climbing of Piagetian stages progresses according to an immutable process of growth. Before the age of six or seven, the child is not ready for arithmetic.'* [DEHAENE 1997, 43]. *'Later, Piaget's theory of cognitive development reinforced this judgement of the young child as mathematically incapable. More specifically, his theory proposed that preoperational children could not understand number and arithmetic, ...'* [BAROODY 1992a, 99].

Dieser starke Bezug auf Piagets Theorie hat verschiedene Gründe. Zunächst ist die Theorie als konstruktivistische Lerntheorie überzeugend: *'Konstruktivistisch an Piagets Theorie ist die Vorstellung, dass das Individuum die kognitiven Konzepte selbst generiert, dass das Individuum Wissen nur im Austausch mit der Umwelt erwirbt und dass die Austauschprozesse nur temporär ein Äquilibrium erreichen, so dass Assimilation und Akkomodation die Entwicklung der Kognititon beim Individuum stets weitertreiben.'* [SCHULMEISTER 1997, 73]. So erklären Piagets Theorien sogar die mentalen Operationen, die in mathematischen Lernprozessen impliziert sind, als Produkte spontaner Rekonstruktion und sind damit immer noch aktuell. Das Kind selbst generiert Konzepte wie Reversibilität, Transitivität, Rekursion, Reziprozität von Relationen, Klasseninklusion, die Erhaltung numerischer Mengen und die Organisation räumlicher Referenzen. Dem widerspricht aber die Stufentheorie, die vermittelt, dass das Kind bestimmte Dinge erst dann lernen kann, wenn es die entsprechende Entwicklungsstufe erreicht hat. Man bietet Kindern folglich nur Lerngelegenheiten die mit der Stufe in Einklang sind, insgesamt eine eher unkonstruktivistische Sichtweise des Lernens.

Zweitens argumentiert Piaget wenn er über das Lernen mathematischer Begriffe schreibt 'mathematisch'. Er spricht die Sprache der Mathematik, wenn er z.B. erklärt, wie Ordination und Kardination interagieren, wie Klassen gebildet werden oder wie transitive, asymmetrische Relationen zu Reihenbildungen führen (vgl. [PIAGET/SZEMINSKA 1975a, 205ff.]), dann versteht das 'der Mathematiker' als eine Lerntheorie, die das Lernen von Mathematik erklären kann. Genau dies wird aber kritisiert. *'Nicht ein logisch-mathematisches System macht es in erster Linie aus, dass Kinder rechnen lernen, sondern eine Welt mit Zahlen, in der die Kinder ihre kognitiven Werkzeuge und Strukturen anwenden und weiterentwickeln können.'* [MOSER OPITZ 2002, 59]. Piaget bietet eine Theorie an, die als eine 'mathematische Lerntheorie' interpretiert werden kann, was in der Folge von AEBLI[1975] ausformuliert wurde. Die Mathematikdidaktik nahm diese Theorie auf und so wird auch heute noch weitgehend nach dieser 'Theorie der Verinnerlichung' Unterricht geplant und durchgeführt. Andere Teile aus Piagets Theorie, wie z.B. die Äquilibrationstheorie, die beschreibt, wie unterschiedliche Lernprozesse ineinandergreifen, wären für die Mathematikdidaktik sehr viel fruchtbarer, da hier der Fokus nicht so sehr auf in Stufen ablaufenden Lernprozessen liegt, sondern die individuellen Lernprozesse in den Mittelpunkt des Interesses rückt. Dies sind besonders die konstruktivistischen Anteile seiner Theorie (siehe hierzu: [v. GLASERSFELD 1990, 19ff.]).

Auch aus dem Bereich der Informatik findet man schon früh erste kritische Anmerkungen zu Piagets Theorie. PAPERT, der bei Piaget in Genf geforscht hat und dann ans MIT ging, kritisiert vor allem die Interpretation der Theorie Piagets als eine Stufentheorie. *'Es wird nicht von Phasen die Rede sein, nicht davon, was Kinder in einem bestimmten Alter lernen können und was nicht. Ich werde mich vielmehr mit dem Erkenntnistheoretiker Piaget beschäftigen, ..'* [PAPERT 1985, 163]. *'Der Piaget der Phasentheorie ist im wesentlichen konservativ, fast reaktionär, wenn er hervorhebt, was Kinder nicht tun können. Ich versuche, einen eher revolutionären Piaget zu enthüllen, dessen erkenntnistheoretische Ideen die heute bekannten Grenzen des menschlichen Geistes ausdehnen können.'* [a.a.O., 164]. Papert beschreibt im Folgenden auch die Umgebungen (Mikrowelten), in denen solch ein 'neues Lernen' nach erkenntnistheoretischen Ideen stattfinden soll, unterstützt durch Computer (siehe 2.1 und 2.2).

Neuere Forschungen zum Zählen (s.u. 1.3.2) lassen außerdem den Schluss zu, dass sich Ordination vor der Kardination entwickelt und nicht als Folge von Mengenbildungsprozessen, wie es Piaget darstellt: *'...Piaget to argue that younger children do not possess a concpetual understanding of number and that any number-related activities such as counting, are largely done by rote.'* [GEARY 1994, 2]. Außerdem herrscht heute Konsens darüber, dass vor dem Aufbau des Relationszahlverständnisses, also, wie Piaget argumentieren würde, bevor die Kinder einen umfassenden Zahlbegriff erworben haben, die Zählfertigkeiten gut entwickelt sein müssen, damit die Kinder mentale Kapazitäten frei haben, die neuen Zusammenhänge zu entdecken. *'A child should be able to count orally and enumerate objects proficiently before beginning efforts to remedy numerical-relationship difficulties.'* [BAROODY, 1992b, 322].

Vor allem aber neuere psychologische Forschungen zum Zahlverständnis von Säuglingen und von Tieren sowie neuropsychologische Forschungen zum Zahlverständnis und zur Zahlverarbeitung zeigen, dass man Piagets Theorie des Zahlbegriffs neu denken muss und seine Experimente mit Kindern kritischer Prüfung nicht standhalten: *'... the standard number-concept tasks developped by Piaget(1965) underestimated the numerical competencies of young children.'* [GEARY a.a.O.]. So hat z.B. DEHAENE ein ganzes Kapitel der Kritik an Piaget gewidmet: *'Piaget's Errors'* [1997, 44ff.] und DEVLIN überschreibt ein Kapitel mit *'Jean Piaget: Auch Experten können irren'* [2002, 44ff.]. Eine ausführliche Darstellung der Kritik an Piaget findet man auch bei MOSEROPITZ [2002, 41ff.].

Aus dem Bereich der Neuropsychologie werden wahrscheinlich zukünftig auch die Impulse kommen, die mithelfen, eine neue Art von Mathematikunterricht zu gestalten. *'Piaget's constructivism and Bourbaki's austere rigour have left their marks on our schools. Will such trenchant educational theories ever give way more serene and better optimized teaching methods, based on a genuine understanding of how the human brain does mathematics?'* [DEHAENE 1997, 232].

Zusammenfassung

Schon bevor Kinder in die Schule kommen, haben sie vielfältiges Wissen über Zahlen, Relationen und Operationen erworben und alles ohne Curriculum, ohne Anleitung, sondern einfach durch Handlungen und Erfahrungen in der Umwelt.

In der Grundschule wird teilweise an diese Erfahrungen angeknüpft. Es werden Mengen von Objekten als unstrukturierte Zusammenfassung genutzt. Auf andere Vorerfahrungsbereiche (Bewegungen, Längenbereich, usw...) wird meist nicht zurückgegriffen

Vorstrukturierte Mengen (*'Zahlenbilder'* [LORENZ 1992, 144ff.]) werden verwendet, z.B. beim Würfelspiel, in einer Packung Steckwürfel, usw., so dass die Gesamtmenge, die Anzahl, mit einem Blick erfasst oder eventuell auch geschätzt werden kann. Wichtig sind die einzelnen Objekte und die Gesamtzahl der Objekte, aber auch die Zahlenbilder selbst werden als Einzelobjekte (z.B. zwei Fünfer) gedeutet.

Sammlungen von Objekten werden gezählt (durch Antippen, mit den Augen, in der Vorstellung, ...), wobei häufig sequentielle und lineare Anordnungen gewählt werden. Kardination und Ordination hängen bei den unterrichtlichen Aktivitäten eng zusammen (vgl. auch 1.3.2).

Größen (Längen) werden im arithmetischen Anfangsunterricht eher beiläufig thematisiert. Selbst bei Themen wie 'größer und kleiner' wird mit Mengenhandlungen gearbeitet, obwohl Längendarstellungen sofort und intuitiv zugänglich wären.

Größen werden als eigener Bereich gesehen, der nur bedingt mit Arithmetik zu tun hat, wie man auch im neuen Bildungsplan nachlesen kann. Dort gibt es eine Leitidee 'Zahl' und eine Leitidee 'Größen und Messen', aber keine Leitidee, die beide Bereiche direkt verbindet, wie z.B. in den Standards des NCTM.

Längen haben per se eine lineare, sequentielle Anordnung. Referenz ist die Einheit, bzw. der Schritt als Metapher, auch am gezeichneten Zahlenstrahl und am mentalen Zahlenstrahl.

Um Längen mit Zahlen benennen zu können, muss immer die Länge in Relation zur Einheit betrachtet werden. Es werden Relationszahlen gebildet. Relationszahlen sind auch das Bindeglied zwischen den grundllegenden und den weiterführenden Zahlaspekten. Flexibles Operieren mit Zahlen ist nur mit der Vorstellung von Relationszahlen möglich.

Auch Mengen können linear angeordnet werden und sind dann nahe an der Größenvorstellung - mehr Fläche, mehr Länge, dann mehr Objekte' oder 'doppelte Länge, dann doppelte Anzahl von Objekten'. Das bedeutet, selbst beim Vergleich von Mengen greift man auf Größenvorstellungen zurück, um Relationszahlen zu veranschaulichen.

In den weiterführenden Schulen, wenn neue Zahlbereiche eingeführt werden, reichen die, in der Grundschule geschulten kardinalen Vorstellungen nicht mehr, da z.B. Bruchzahlen die Beziehung zwischen zwei Zahlen, dem Ganzen und dem Bruchteil ausdrücken. *'Benötigt wird ein über die Kardinalzahl hinausgehendes Verständnis spätestens, wenn nicht-kardinale Zahlen wie Brüche oder negative Zahlen eingeführt werden....Eine funktionale Einschränkung besteht darin, daß man Bruchzahlen und negative Zahlen nicht zur Ermittlung der Anzahl der Elemente einer Menge heranziehen kann.'* [STERN 1998, 79]. Besonders im Bereich multiplikativer Operationen müssen diese mengenfixierten Grundvorstellungen bei der Zahlbereichserweiterung z. T. radikal verändert werden (vgl. [RUWISCH 2002, 113f.]).

1.3 Der Zahlbegriff aus psychologischer Sicht

Die Begriffe 'mentale Modelle', 'mentales Operieren', 'mentaler Zahlenstrahl' sind zunächst einmal Begriffe aus der psychologischen Forschung. Diese werden aber auch in der Mathematikdidaktik gebraucht, um damit der direkten Beobachtung nicht zugängliche Prozesse zu umschreiben. In diesem

Kapitel wird nun versucht, darzustellen, welche Modelle des Zahlverstehens und der Zahlverarbeitung die neuere psychologische und die neuropsychologische Forschung hervorgebracht haben, um dann daraus Rückschlüsse auf das Lernen im Mathematikunterricht allgemein und auf das Zählen und die Zahlenstrahlvorstellung, die beide in unserem Forschungsinteresse liegen, zu ziehen.

1.3.1 Neuropsychologische Modelle des Zahlverstehens

Die neuropsychologische Forschung hat in den letzten Jahren verschiedene Modelle des Zahlbegriffserwerbs hervorgebracht, die teilweise noch sehr kontrovers diskutiert werden (siehe [v.Aster 1996, 8ff.]; und [Macaruso/Sokol 1998, 201ff]). Besonders die Forschung an Dyskalkuliepatienten, bei denen bestimmte Hirnregionen ausgefallen sind, und die Messungen von Hirnaktivitäten mit Hilfe der Computertomographie zeigen, dass Zahlverarbeitung nicht in einem Modul oder in einer Hirnregion stattfindet, sondern höchst komplexe und verteilte Mechanismen in vielen Hirnregionen aktiviert.

Zahlauffassung und Zahlverarbeitung nach McClosky u.a.

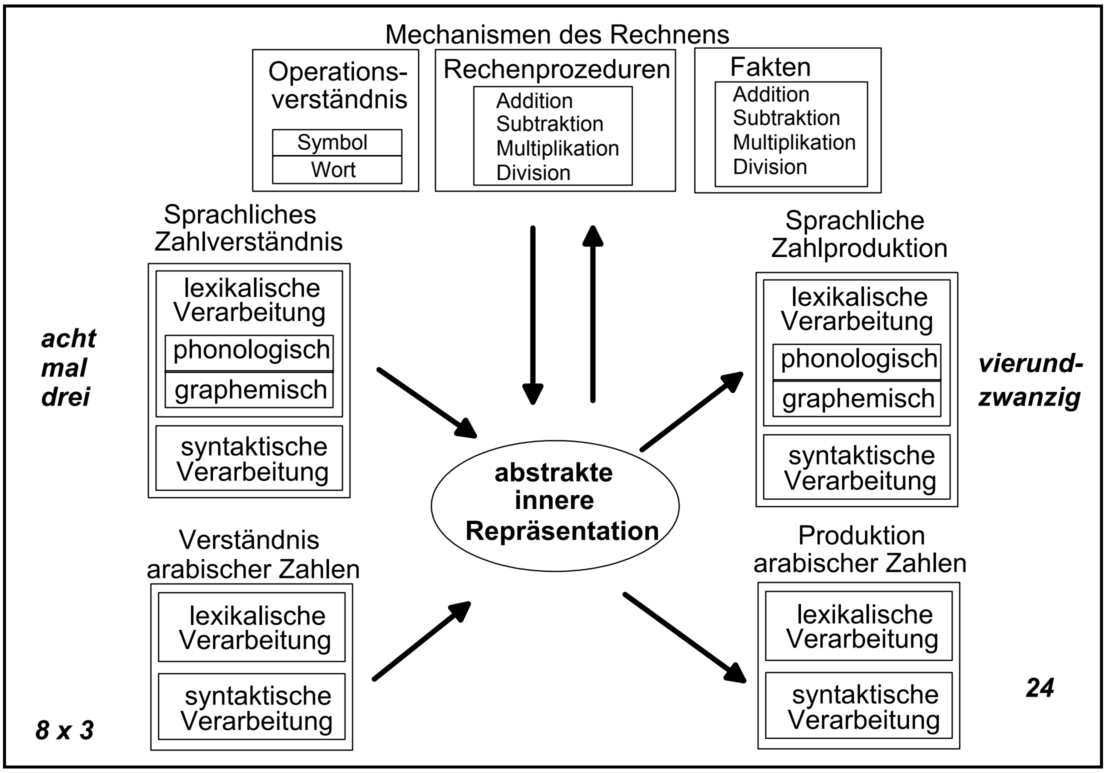


Abb. 1.09: Modell der Zahlverarbeitung n. McClosky, übersetzt v. Autor

Das erste umfassende neuropsychologische Modell des Rechnens wurde von McCloskey, Caramazza und Basili [1985] präsentiert.

Es beschreibt funktionell voneinander unabhängige Mechanismen, auch Module genannt, der auffassenden und der ausführenden Zahlenverarbeitung (numeral comprehension and production mechanisms).

Als Schaltstelle zwischen den einzelnen Modulen gibt es eine zentrale abstrake Bedeutungsrepräsentation. Die auffassenden Module überführen die zu verarbeitenden Zahleninformationen in die innere Bedeutungsform um sie z.B. für das Rechnen oder andere kognitive Prozesse bereitzustellen. Auch die ausführenden Mechanismen greifen auf die abstrakten, inneren Bedeutungsformen zu und übersetzen diese in eine entsprechende vermittelbare Zahleninformation.

Innerhalb der auffassenden und ausführenden Module unterscheidet das Modell Komponenten für die Verarbeitung von Zahlen in Wortform (dreiundzwanzig) und in Form arabischer Ziffern (23) sowie darüber hinaus jeweils lexikalische und syntaktische Prozessoren. Lexikalische Prozessoren unterscheiden zwischen phonologischen (['drai']) und graphemischen Verarbeitungsmechanismen (drei). Die syntaktischen Regeln beziehen sich auf die richtige Komposition der Wortelemente bzw. die korrekte Ziffernplatzierung im arabischen Stellenwertsystem.

Für das Rechnen selbst wird die abstrakte interne Repräsentation benutzt, die durch spezielle kognitive Prozesse zugänglich gemacht wird. Diese Prozesse umfassen das Umsetzen operativer Symbole und Wörter (z.B. +, plus, -, ...), die Durchführung von rechnerischen Prozeduren (z.B. Schritte des Algorithmus der schriftlichen Addition) und das Auffinden von Faktenwissen für das Rechnen (z.B. Eins-plus-Eins, Einmaleins, algebraisches Wissen, usw...). Die abstrakte interne Repräsentation ist quasi der Mittler zwischen den Eingabeprozessen, den kognitiven Prozessen des Rechnens und den Ausgabeprozessen.

Kritisiert wurde diese Modellvorstellung insbesondere hinsichtlich des Postulats der obligatorischen zentralen semantischen Repräsentationsform als Voraussetzung für Zahlenproduktion und Rechnen. Außerdem formulieren Macaruso/Sokol[1998, 209ff.] eine ganze Reihe von Fragen, die bei diesem Modell noch offen bleiben:

- Es wird keine Unterscheidung zwischen dem Rechnen und Schätzen gemacht.

- Es ist nicht genügend klar, in wie weit sich Defizite im Arbeitsgedächtnis auf die einzelnen Module auswirken.
- Es ist zu klären, wie sich schlecht entwickelte Zählfertigkeiten auf das Abrufen arithmetischer Fakten auswirken können.
- Es ist nicht geklärt, ob arithmetischen Fakten und Regeln nicht dasselbe sind. Eventuell werden Regeln wie Fakten gespeichert und nur anders angewendet.
- In dem Modell wird nur erklärt, wie arithmetische Fakten beim Rechnen genutzt werden, es ist aber nicht klar, wie sie im Langzeitgedächtnis gespeichert wurden.

Konsens ist, dass es sprachliche Repräsentationen und Repräsentationen für arabische Zahlen gibt. Beide Repräsentationen sind aber kulturabhängig (Leserichtung, ...). Es gibt sogar Autoren, die noch weiter gehen und individuelle Typen postulieren. Ein 'sprachlicher Typ' übersetzt die Ziffern einer Gleichung in eine Wortform, bevor er sie prozedural bearbeitet. Der 'Ziffern-typ' dagegen muss eine gesprochene Rechenaufgabe im Kopf in eine Ziffernform bringen, um sie bearbeiten zu können (vgl. [v.Aster 1996, 9f.]).

Die 'funktionale Architektur' der Arithmetik nach Butterworth

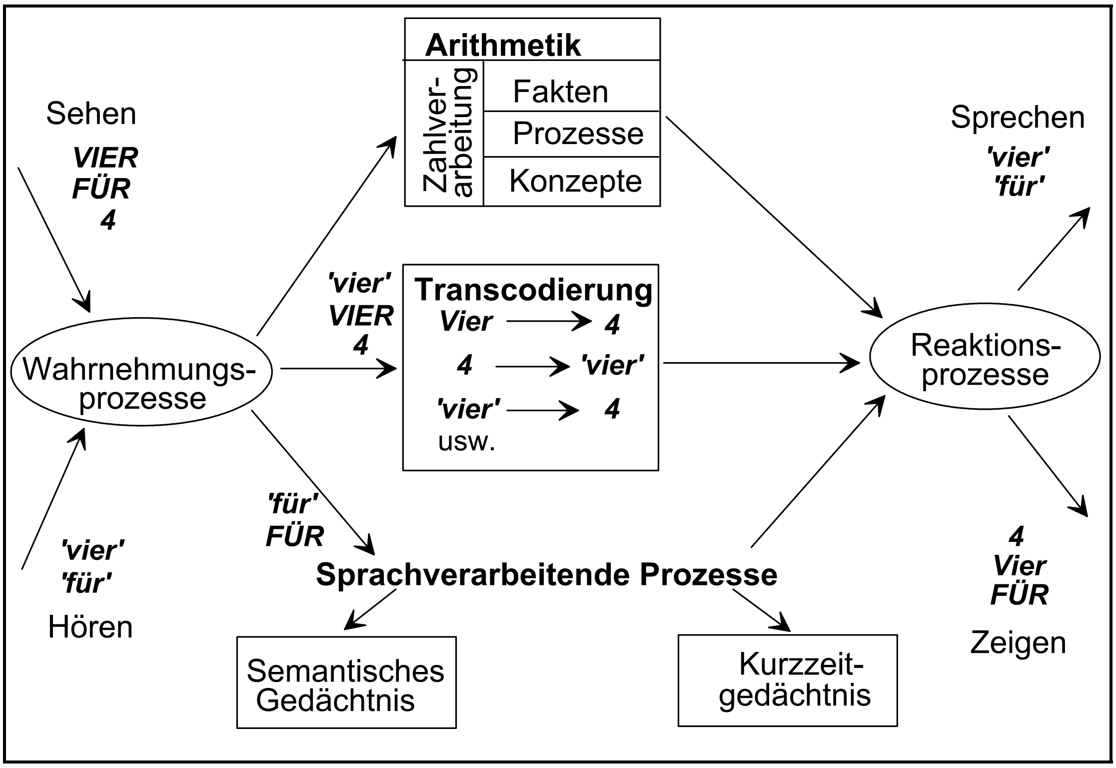


Abb. 1.10: Zahlverarbeitung nach Butterworth, übersetzt vom Autor

BUTTERWORTH [1999, 208] berücksichtigt in seinem Modell zusätzlich die Randbedingungen der Wahrnehmung und Produktion von Zahlen und Zahlwörtern. Die Verarbeitungsmechanismen entsprechen weitgehend dem Modell von McClosky. Die verschiedenen Eingabe- und Ausgabekanäle sowie unterschiedliche 'Wege durch das Gehirn', die für Zahlen möglich sind, werden hier besonders hervorgehoben.

Butterworth unterscheidet zwischen Transcodierungsprozessen und Zahlverarbeitungsprozessen. Zahlen in Wort-, Ziffern- und Textform werden direkt dekodiert und transkodiert, also in eine der anderen beiden möglichen Formen umgewandelt. Zahlverarbeitungsprozesse setzen ein, wenn z.B. gerechnet wird. Dann braucht man Faktenwissen, wie z.B Rechenregeln, Prozesswissen, wie z.B den Subtraktionsalgorithmus und evtl. noch zusätzlich Konzepte, z.B. über Näherungen, um das Ergebnis kontrollieren zu können.

Die Trennung in ein Modul zur Transcodierung und eines zur Arithmetik in diesem Modell ist nicht haltbar. Wenn Zahlen als solche erkannt werden, dann werden sofort auch Konzepte, Kontextwissen und Wissen über mögliche Operationen zu diesen Zahlen aktiviert. Transcodierungsprozesse und Zahlverarbeitungsprozesse laufen sicher nicht parallel zueinander, sondern müssen eher als zusammenhängende verschachtelte Prozesse gedacht werden. Reine Transcodierungsprozesse, also z.B. das Erkennen der Ziffer 4 und dann Sprechen des Zahlwortes 'vier' sind sehr rudimentäre mathematische Prozesse. In dem Modell fehlt außerdem die Verbindung vom Kurzzeit- oder Arbeitsgedächtnis zum Langzeitgedächtnis. Faktenwissen und Prozesswissen ist sicher im Langzeitgedächtnis gespeichert und muss von dort ins Arbeitsgedächtnis abgerufen werden können. Andererseits wird dieses Faktenwissen im Laufe der Zeit weiter ausgebaut, es muss also auch irgendwie Wissen aus dem Arbeitsgedächtnis in das Langzeitgeächtnis übergehen.

Triple-Code-Modell nach Dehaene

Die bisher erwähnten Modelle berücksichtigen einseitig die syntaktischen Prozesse der Zahlenverarbeitung und des Rechnens. Wie schon erwähnt werden zahlensemantische Aspekte, die sich in Fähigkeiten wie dem Schätzen, dem Vergleichen oder dem Beurteilen von Beziehungen zwischen Zahlen und Mengen zeigen, zu wenig oder gar nicht beachtet. Genau dies wird im Modell von DEHAENE [1992] korrigiert.

Die drei Module in diesem Modell sind Repräsentationsebenen, die miteinander verschaltet sind und über spezifische Input- und Outputmechanismen verfügen. Informationen über Zahlen werden entsprechend ihrer Repräsentationsform in die verschiedenen Module aufgenommen, verarbeitet und wieder ausgegeben oder in eine andere Repräsentation überführt.

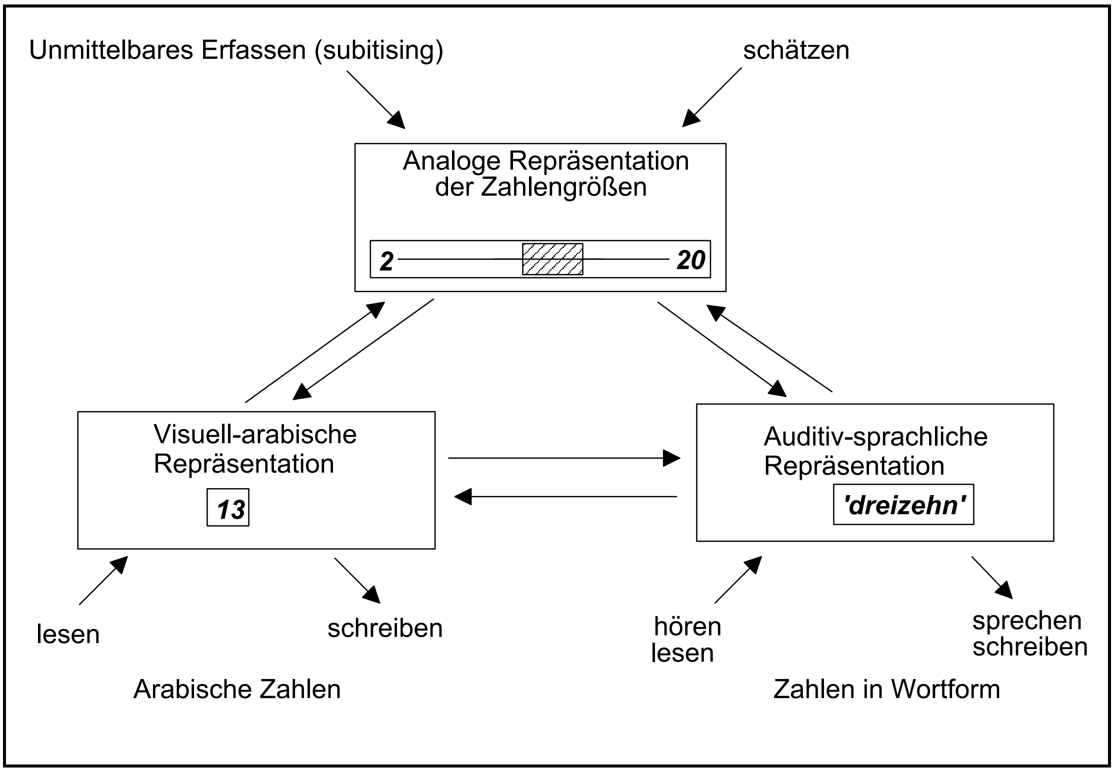


Abb. 1.11: Triple-Code-Modell von Dehaene, Übersetzung v.ASTER[1996, 11]

In einem ersten Modul, das als 'Auditiv-sprachliche Repräsentation' (auditory verbal word frame') bezeichnet wird, sind Zahlen ausschließlich in Wortform repräsentiert. Diese Zahlen in Wortform können über das Hören oder über das Lesen aufgenommen und über Sprechen oder Schreiben ausgeben werden. Dieses Modul wird beim Kopfrechnen, beim Speichern und Abrufen von Faktenwissen über Zahlen sowie beim Zählen aktiviert, also bei allen Prozessen, die nicht speziell an arabische Ziffern gebunden sind.

Das zweite Modul, 'visual arabic number form' (Visuell-arabische Repräsentation), wird beim Operieren mit mehrstelligen Zahlen, bei der schnellen Entscheidung, ob eine Zahl ungerade oder gerade ist, kurz gesagt, bei allen Operationen im arabischen Stellenwertsystem benötigt. Die Repräsentationsform dieses Moduls ist an die arabische Ziffernschreibweise gebunden. In diesem Modul werden Zahlen durch Lesen aufgenommen und durch Schreiben ausgegeben.

Komplexe Rechenanforderungen erfordern ein ständiges Hin- und Zurückübersetzen zwischen den beiden genannten Repräsentationsmodulen.

Die Semantik einer Zahl ist in einem Modul enthalten, das als 'Analoge Repräsentation der Zahlengrößen' (analogue magnitude representation) bezeichnet wird. Hier ist die größen- und auch mengenmäßige Bedeutung des gespeicherten Zahlenwissens angelegt. Das Modul ermöglicht das Vergleichen von Anzahlen über die internen Zahlengrößen sowie Überschlagsrechnungen. Diese Vorgänge werden über Subitising (visuelles Erfassen einer Anzahl auf einen Blick, siehe auch 1.3.2) und über Schätzprozesse in Gang gebracht. In diesem Modul ist das, was wir als Zahlenverständnis oder Zahlensinn bezeichnen, auf einer Art innerem Zahlenstrahl angelegt (s.u. 1.3.3). Für die Funktionseinheit der 'Analog Magnitude Representation' sprechen Beobachtungen, die zeigen, dass bei hirngeschädigten Erwachsenen mit Aphasie und Akalkulie einzig Fähigkeiten, vor allem im Bereich des Subitizing und Schätzens erhalten blieben, die dieser semantischen Verarbeitungseinheit zugeschrieben werden. Sie konnten zum Beispiel richtig entscheiden, ob ein Ergebnis in etwa stimmen könnte oder nicht, dieses Ergebnis aber nicht berechnen.

Von DEAHENE [1999, 225ff.] stammt auch ein anatomisches Modell der Zahlverarbeitung.

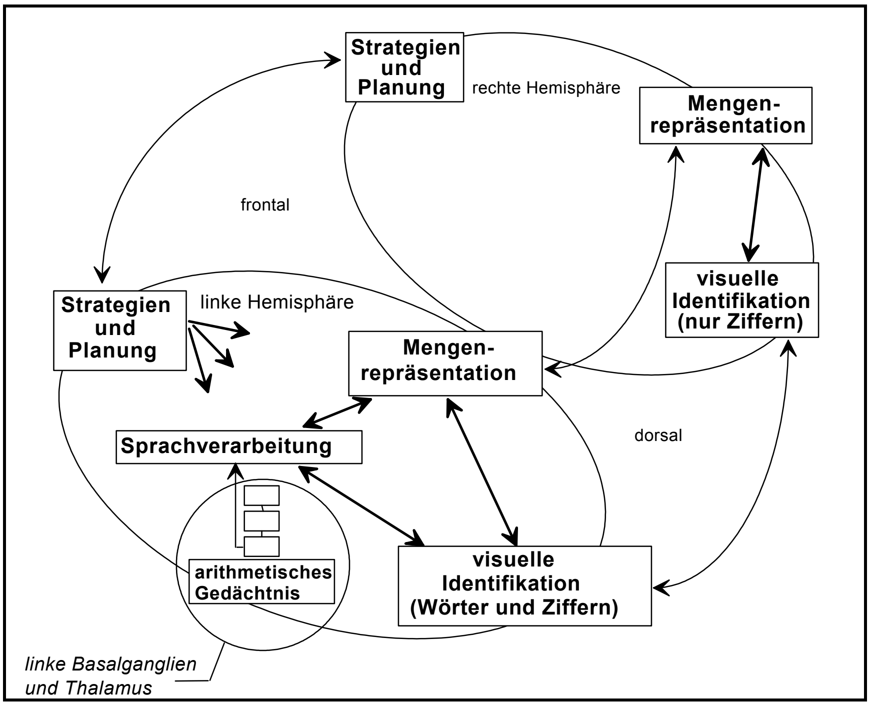


Abb. 1.12: Funktionell-anatomisches Modell n. DEHAENE, übersetzt v. Autor

Er beschreibt hier, belegt durch klinische Studien, in einem vorläufigen Modell, wie die einzelnen Hirnregionen an der Erkennung und Verarbeitung von Zahlen und an der Durchführung von Operationen beteiligt sind.

Schon in diesem ersten vorläufigen Modell wird deutlich, dass Zahlverarbeitung und Rechnen hochkomplexe Prozesse sind, an denen sehr viele unterschiedliche Areale des Gehirns beteiligt sind, insbesonders immer auch sprachliche Komponenten aus der linken Hirnhälfte. Beide Hemisphären verfügen über ein visuell-arabisches Repräsentationsmodul, wobei die in der rechten Hemisphärie liegende Funktionseinheit weniger leistungsfähig ist, als die linkshemisphärische. Beide Hemisphären verfügen auch über ein analoges Repräsentationsmodul. Über eine auditiv-sprachliche Repräsentationsform, als Teil der sprachverarbeitenden Hirnregionen, verfügt ausschliesslich die linke Hirnhälfte. Da fast alle Funktionen doppelt angelegt sind, könnte ein Ausfall der rechten Hemisphäre diesem Modell zufolge weitestgehend durch die linke Hemisphäre kompensiert werden. Defizite könnten höchstens im Bereich der semantischen Zahlenverarbeitung durch das analoge Repräsentationsmodul spürbar werden. Ausfälle im Bereich der linken Hemisphäre dagegen würden, insbesonders was die sprachabhängigen Funktionen, wie z.B algebraisches Wissen, Zahlensätze des Einmaleins, usw... betrifft, zu schwerwiegenden und kaum kompensierbaren Funktionseinbußen führen.

Das Modell von Dehaene muss sicher noch weiter ausdifferenziert und verfeinert werden, bevor man individuelle Aussagen über das Zahlenlernen machen kann. Dies zeigt auch v.Aster [1996, 12], der Campell [1994] referiert: *'Campbell (1994) schliesslich kritisiert die referierten Modelle hinsichtlich ihrer Annahmen über die abstrakten Repräsentationsmodi sowie die formatunabhängige Speicherung von Faktenwissen. Die Autorin konnte zum Beispiel aufzeigen, dass das Darbietungsformat von einfachen Additions- und Multiplikationsaufgaben (mündlich, schriftlich, Ziffernform, Wortform) durchaus einen Einfluss auf die Art der entstehenden Fehler hat. Dies belegt ihrer Ansicht nach, dass die Speicherung arithmetischer Fakten, aber auch der Zugriff auf Lösungsstrategien und Prozeduren in einer gewissen Abhängigkeit von Merkmalen der Kodierung erfolgt. Die Autoren postulieren daher eine grössere Vielfalt von unterschiedlichen Zahlenrepräsentationen (visuell-imaginative, sprachliche, motorische), die in Abhängigkeit von der individuellen Lemgeschichte und von Merkmalen der Aufgabe bedarfsweise aktiviert werden ('Network-lnterferenceModell').'*

1.3.2 Zählen

'Wer den Zählvorgang versteht, kann alles mögliche über Zahlen herausfinden. Das Zählen ist das Schweizer Taschenmesser des Rechnens, ein Werkzeug, das Kinder spontan für alle möglichen Zwecke nutzen.' [DEHAENE 1999, 143].

Wie kommen aber die Kinder zu diesem nützlichen Werkzeug? Ist es angeboren oder muss es erlernt werden? Wie entwickelt es sich und welche Probleme können auftreten? Wo sind die Grenzen, also wo hilft Zählen nicht weiter?

KRAUTHAUSEN [1995, 90f.] weist darauf hin, dass im Anfangsunterricht großes Gewicht auf eine differenzierte Zählfähigkeit gelegt wird, dass aber andererseits Abzählstrategien überwunden werden müssten, um zum *'denkenden Rechnen'* zu gelangen. *'Zählendes Rechnen unterstützt nicht den Aufbau eines numerischen Netzwerkes, in dem alle Einzelaufgaben in ein bedeutungshaltiges Beziehungsgeflecht eingebettet sind - es bleibt bei isolierten Einzelfakten.'* [a.a.O. 91]. Auch LORENZ sieht dieses Problem: *'Nahezu alle Grundschüler mit Lernschwierigkeiten im Mathematikunterricht werden im Laufe des 1. Schuljahrs zählende Rechner, sie verfestigen diese Strategie, und ohne individuelle Förderung bleiben Sie über mehrere Schuljahre 'Zähler'....'* [1993c, 116ff.]. Individuelle Förderung ist aber in der tradierten Form von Unterricht, im Klassenunterricht, kaum möglich. Folglich werden die Kinder dazu gedrängt, ohne Zählen zu rechnen oder heimlich zu zählen, damit sie schnell diese 'zählende Vorstufe des Rechnens' überwinden und zum richtigen Rechnen, zum 'denkenden Rechnen' kommen. Beides produziert Fehler und trägt nicht zur Überwindung des zählenden Rechnens bei. Wahrscheinlich sind die Zählstrategien dieser Problem-Kinder noch eher primitiv und nicht weit genug entwickelt, so dass sich der Übergang zu anderen Strategien vollziehen kann. Es könnte aber auch sein, dass diese Kinder vor ihrer Schulzeit zu wenig Zählanlässe hatten, dass sie also mit zuwenig Zählfertigkeiten in die Grundschule kamen und nun die Zeit im ersten Schuljahr zu knapp ist, diesen Kindern geeignete Verfahren zu vermitteln, die helfen, das Zählen zu perfektionieren und dann zu überwinden. Wie sich Zählen entwickelt und welche Strategien darauf aufbauen, wird in den folgenden Abschnitten dargestellt.

Subitizing - angeborene spontane Anzahlerfassung

MILLER [1956] berichtet von Schätzversuchen zur spontanen Anzahlerfassung: *'... random patterns of dots were flashed on a screen for 1/5 of a second. Anywhere from 1 to more than 200 dots could appear in the pattern. The subject's task was to report how many dots there were. The first point to note is that on patterns containing up to five or six dots the subjects simply did not make errors. The performance* *on these small numbers of dots was so different from the performance with more dots that it was given a special name. Below seven the subjects were said to subitize; above seven they were said to estimate.'*

Was 'Subitizing', dieses spontane Anzahlerfassen aber ist, war lange umstritten. GELMAN/GALLISTEL [1992, 66ff.] beschreiben 'Subitizing' als einen sehr schnellen, sprachfreien Abzählvorgang auf Mengen bis zu fünf Elementen. DEHAENE [1999, 84ff.] dagegen ist der Auffassung, dass alle Objekte bis zu einer Anzahl von drei gleichzeitig wahrgenommen werden, ohne sie zu zählen. Er belegt dies mit einer Studie an hirngeschädigten Erwachsenen. Diese versagten vollständig beim Abzählen von Mengen mit mehr als drei Objekten, machten aber kaum Fehler bei Mengen von drei und weniger Objekten, deshalb müssen hier unterschiedliche Mechanismen aktiviert worden sein: spontane Anzahlerfassung und Zählen. FISCHER [1992] referiert eine Reihe verschiedener Untersuchungen, die alle belegen, dass für Vorschulkinder die Grenze der Spontanerkennung bei drei Objekten liegt. Ältere Kinder und Erwachsene können aber auch vier und fünf Objekte spontan erkennen, wenn die Mengen entsprechend strukturiert und die Muster gut bekannt sind. *'The definition of subitizing can be extended to include recognition of canonical geometric patterns such as 4 in a square or 5 in the die configuration.'* [a.a.O., 206]. Die Grenze der Spontanerkennung liegt, wie schon MILLER zeigte, bei sieben Objekten [a.a.O., 207]. Geometrische Anordnungen werden besser erkannt als lineare Anordnungen. *'An array of 3 is scarely easier to identify, when it is presented in a geometric pattern (a triangle) than when it is presented in a linear fashion.'* [a.a.O., 208]. Es scheint also so, als ob 'Subitizing' grundsätzlich angeboren ist, aber durch Lernen verbessert werden kann. Falls Kinder also häufig mit Punktmustern wie z.B. auf dem Würfel zu tun haben, dann erkennen sie die Anzahl sofort und unmittelbar. Genauso geht es dem Kartenspieler, der seine Spielkarten häufig gebraucht. Er sieht mit einem Blick ob es sich bei der Karte um eine Sieben, Acht oder Neun handelt, ohne darüber nachdenken oder gar die Symbole abzählen zu müssen.

Diese Fähigkeiten zur Wahrnehmung kleiner Anzahlen findet man schon bei Säuglingen im Alter von 6-7 Monaten wie WYNN [1992] nachweist. '... *Infants as young as 5 months of age are sensitive to numerical relationships between small numbers and able to compute the results of simple numerical operations'* [a.a.O., 17]. Auch bei Tieren findet man diesen angeborenen Zahlensinn (vgl. [DEHAENE 1999, 24ff.]), den wir Menschen dann kultivieren und aufgrund unserer Sprachfähigkeiten weiterentwickeln können. *'Im wesentlichen spielt der Zahlensinn, den wir im Lauf unserer Evolution erworben haben, wohl die Rolle eines Keims,* *in dem die Möglichkeit der Entwicklung höherer mathematischer Fähigkeiten schlummert'* [a.a.O., 53]. FISCHER beschreibt das Subitizing auch als deklarativen Prozess, also eine Einszueins-Zuordnung zwischen Muster und Anzahl und die Verarbeitung größerer Zahlen als prozeduralen Prozess, der verschiedene nachgeordnete Prozeduren anstößt, wodurch die Verarbeitungszeit und die Fehlerrate ansteigen [a.a.O., 208].

DEHAENE [1999] gliedert sein Buch zum Zahlensinn in drei große Teile: der erste ist überschrieben mit *'Our numerical Heritage (Unser numerisches Erbe)'*, der zweite mit *'Beyond Approximation (Jenseits der Näherungen)'*, beim dritten geht es um die Verarbeitung der Informationen im Gehirn. Wir gehen also auf zwei höchst unterschiedliche Arten mit Zahlen um, einerseits approximativ, räumlich und intuitiv und andererseits algorithmisch, genau und erlernt. Wie sieht es aber aus, wenn es sich um natürliche Zahlen in größeren Zahlenräumen handelt? Können wir uns dann auch noch mehr oder weniger auf unseren angeborenen Zahlensinn verlassen?

Schätzen - wie wir größere Anzahlen erfassen

Schätzungen größerer Anzahlen werden durch den Kontext und die Anordnung der Objekte beeinflusst. Bei unregelmäßiger Verteilung neigen wir dazu, Anzahlen zu unterschätzen, bei gleichmäßiger Verteilung überschätzen wir Anzahlen (vgl. [DEHAENE 1999, 86f.]). Die Trefferquote beim Schätzen kann man deutlich verbessern, wenn man einmal eine Bezugsmenge genau bestimmt hat. Trotzdem folgt die Genauigkeit beim Schätzen derselben Gesetzmäßigkeit wie man sie bei Tieren beobachten kann. Andererseits gehen aber unsere Fähigkeiten im Umgang mit Zahlen weit über deren Fähigkeiten hinaus, *'denn wir unterscheiden uns ja offensichtlich von anderen Tieren durch unsere Fähigkeit, für Zahlen solche Symbole wie Wörter oder arabische Ziffern zu verwenden. Diese Symbole sind diskrete Elemente, die sich rein formal manipulieren lassen, ohne jede Unschärfe.'* [a.a.O., 89]. Damit hätten wir dann die Schwelle zur Genauigkeit überschritten, wenn es da nicht die interne mentale Repräsentation von Zahlen gäbe: *'wenn wir eine arabische Ziffer sehen, kann unsere Gehirn einfach nicht umhin, sie als eine analoge Größe zu sehen und sie mental mit geringerer Genauigkeit abzubilden ...'* [a.a.O., 89]. Die Zeit, die diese Übersetzung von Symbolen in Größen braucht, kann man sogar messen, wenn man Vergleichsaufgaben untersucht. Alle Experimente zum Vergleichen und zum Distanzeffekt mit ein- und zweistelligen Zahlen deuten darauf hin, dass Zahlen mental in einer Analogdarstellung, also in einer Art quantitativer Repräsentation, die Nachbarschaftsbeziehungen mit berücksichtigt, gespeichert sind [a.a.O., 90ff.].

Das hat zur Folge, dass die Zahlen, die Kinder in der ersten Klasse kennenlernen nicht formal, also ziffernmäßig verarbeitet, sondern im Kontext, mit allen Beziehungen zu den anderen Zahlen verarbeitet werden sollten. Daraus folgt weiter, dass Kinder dann besser mit Zahlen umgehen können, wenn sie dabei einen reichhaltigen Kontext aktivieren können. Die Stellensichtweise, Zehner und Einer bei zweistelligen Zahlen, dient dann eher dazu, eine Größenvorstellung zu vermitteln, als die formale Grundlage unseres Zahlsystems aufzubauen. Weiter muss man daraus folgern, dass ein zu früher Wechsel von Materialhandlungen, z.B. mit dem Mehrsystemmaterial, zu rein formalen Aktivitäten, z.B. in der Stellentafel, das Kind in ein Vakuum stößt. Es hat keine Bezugspunkte mehr, um Größen- bzw. Mengenvorstellungen und reichhaltige Verknüpfungen zu schon bekannten 'Zahlengrößen' anzulegen. Zahlen werden dann wirklich abstrakt und damit unverständlich und unbrauchbar. Ziffern und Zahlen müssen also Bedeutung bekommen, durch die interne mentale Repräsentation als numerische Größe. *'Es ist praktisch unmöglich, die Form der Ziffer 5 zu sehen, ohne sie nahezu augenblicklich in die numerische Größe fünf umzuwandeln, selbst wenn uns diese Übersetzung in dem jeweiligen Zusammenhang keinerlei Nutzen bringt.'* [a.a.O., 94]. Dehaene spricht hier sogar von einem Verstehensreflex für Zahlen und belegt dies durch Beispiele [a.a.O., 95f.].

Zählen und Rechnen

Im Alter von vier Jahren berücksichtigen die meisten Kinder die fünf Grundprinzipien des Zählens (siehe *Counting Principles* in [Gelman/Gallistel 1978, 77ff.]):

- Eins-zu-eins-Zuordnung zwischen zu zählenden Objekten und Zahlwörtern (One-One Principle).
- Die stabile, wiederholbare Reihenfolge der Zählwörter (Stable-Order Principle).
- Das Kardinalitätsprinzip, die zuletzt genannte Zahl des Zählvorgangs bestimmt die Anzahl der Elemente der ausgezählten Menge (Cardinal Principle).
- Abstraktion des Zählvorgangs, eine Generalisierung auf alle zählbaren, durch diskrete Einheiten strukturierte Dinge (Abstraction Principle)
- Irrelevanz der Reihenfolge der Objekte beim Zählen (Order-Irrelevance Principle).

Während Gelman und Gallistel davon ausgehen, dass diese Prinzipien den Kindern grundsätzlich zur Verfügung stehen, also angeboren sind ('principles-first-theory'), gehen andere, wie z.B. WYNN [1998, 22ff.], BAROODY [1992a, 100ff.] oder MOSEROPITZ [2001, 66ff.] davon aus, dass die Prinzipien nicht alle angeboren sein können, sondern zum Teil während ihrer Anwendung erlernt werden ('principles-after-theory). Genannt werden hier vor allem das Kardinalitätsprinzip und das Prinzip der stabilen Reihenfolge, die beide mit der Sprachentwicklung zusammenhängen.

Die große Bedeutung der Sprache beim Zählenlernen wird im folgenden kurzen Vergleich zwischen deutschen und chinesischen Zahlwörtern deutlich. Die chinesischen Zahlwörter sind alle einsilbig, sie sind kurz (z.B. sieben -> qi) und die Syntax der Zahlbildung ist eindeutig (z.B. 'zwölf' -> 'shi er' -> 'zehnzwei'). Kinder mit anderen Muttersprachen, als z.B. der deutschen, können leichter zählen lernen und machen weniger Fehler (vgl. [FUSON/KWON 1992b, 283ff.]: chinesische Kinder oder [TOWSE/SAXTON 1998, 129ff.]: japanische Kinder). Dies stellt auch DEHAENE fest: *'Westliche Zählsysteme sind denen asiatischer Sprachen in mindestens dreifacher Hinsicht unterlegen - sie sind schwerer im Kurzzeitgedächtnis zu speichern, sie verlangsamen Berechnungen und sie erschweren den Erwerb des Zählens und der Grundzahl Zehn.*' [1999, 125].

Eine Aufzählung weiterer kognitiver Fähigkeiten, die für das Zählen wichtig sind, findet man bei LAKOFF/NUNEZ [2000, 51f.]:

- *Grouping capacitiy*: Die Fähigkeit, diskrete Objekte durch Anfassen, mental oder mit den Augen zu gruppieren, um sie dann zählen zu können.
- *Ordering capacity*: Die zu zählenden Objekte müssen sequentiell angeordnet werden können, um sie z.B. den Fingern, oder der sequentiellen Folge der Zählzahlen zuordnen zu können.
- *Pairing capacity*: Innerhalb der Sequenz Paare aus Zahlwort und Objekt bilden können (s.o. One-One Principle).
- *Memory capacity*: Sich merken können, welche Zahlwörter, Finger und Objekte schon gezählt sind.
- *Exhaustion-detection capacity*: Erkennen, wenn es keine zu zählenden Objekte mehr gibt.
- *Cardinal-number assignment*: (s.o. Cardinal Principle).
- *Independent-order capacity*. (s.o. Order-Irrelevance Principle).

Bei größeren Mengen und um den Übergang zu Operationen zu schaffen, braucht man zusätzlich noch folgende Fähigkeiten:

- *Combinatorial-grouping capacity*: Einzelobjekte zu größeren Einheiten zusammenfassen können, z.B. Objektpaare und Zahlwörterpaare.
- *Symbolizing capacity*: Fähig sein, arabische Ziffern oder Zahlwörter mit 'Zahlengrößen', dem Konzept Zahl, zu verbinden und umgekehrt.
- *Metaphorizing capacity*: Fähig sein, Kardinalzahlen und Operationen mit eigenen Erfahrungen zu verbinden, z.B. mit der Bewegungsmetapher, mit Längen, dem Teil-Ganzes Schema usw.
- *Conceptual-blending capacity*: Fähig sein, Zusammenhänge zwischen verschiedenen Erfahrungsbereichen, Konzepten und Metaphern herzustellen (z.B. Subitizing und Zählen kombinieren), um so komplexere Konzepte und neue Metaphern aufzubauen.

Eine genauere Darstellung der Bedeutung von Metaphern im mathematischen Anfangsunterricht findet man unten (2.3.2). Die kurze Aufzählung verdeutlicht aber schon hier, dass es nicht ausreicht, nur einzelne Prozesse des Mathematiklernens, wie z.B. das Zählen in seiner Entwicklung, zu betrachten. Der Erwerb mathematischer Fähigkeiten und von mathematischem Wissen kann nur erfolgreich sein, wenn dieses Wissen in vorhandene Strukturen eingefügt werden kann, die durch Metaphern aktiviert wurden. Durch Vernetzung mit anderen Bereichen wird dieses Wissen dann immer komplexer und leistungsfähiger (vgl. *grounding metaphors / linking metaphors* [a.a.O., 53]).

Die Zahlwortreihe selbst wird nach und nach immer sicherer und immer weiter ausgebaut. Die Entwicklung vollzieht sich auf fünf aufeinander aufbauenden Niveaus [FUSON 1992a, 131ff. ; MOSEROPITZ 2001, 86]:

- (String Level): Ganzheitsauffassung der Zahlwortreihe.
- (Unbreakable List Level): Unflexible Zahlwortreihe
- (Breakable Chain Level): Teilweise flexible Zahlwortreihe.
- (Numerable Chain Level): Flexible Zahlwortreihe.
- (Bidirectional Chain Level): Vollständig reversible Zahlwortreihe.

Das Aufsagen der Zahlwortreihe und dann das Zählen wird in der Vorschulzeit immer mehr zu einem Zählen, das kardinales Verständnis beinhaltet. Wenn Kinder im Alter von ca. vier Jahren schließlich über das Kardinalitätsprinzip verfügen, dann baut darauf die Fähigkeit auf, einfache Additions- und Subtraktionsaufgaben ausführen zu können. Hierbei greifen die Kinder auf drei unterschiedliche Strategien (vgl. [Geary 1994, 53]) zurück:

- alle zählen *('counting all procedure')*, auch bezeichnet als *'sum procedure'*.

- weiterzählen ab der ersten Zahl (*'counting on from the first number'*), verkürzt bezeichnet als *'first'*.
- weiterzählen ab der größeren Zahl (*'counting on from the larger number'*), kurz bezeichnet als *'min'*- Strategie.

Diese Strategien setzen schon entwickelte Zählfertigkeiten und Wissen über Zahlen (kardinales Wissen) sowie prozedurales Wissen (z.B. Kommutativität) voraus. *'The most sophisticated, counting on from the larger - or min - procedure requires not only an understanding of how the cardinal value of the addends can be used to make verbal counting more efficient but also an understanding that the order with which numbers are added together does not affect the result.'* [a.a.O., 53]. Die min-Strategie wird von Kindergartenkindern aber meist nicht angewandt, diese verwenden in der Regel die sum-Strategie. *'Kindergarten children typically use the counting all procedure, whereas first-grade children typically use the counting on from the larger procedure.'* [a.a.O., 54].

In der Übersicht der Entwicklungsstufen der Zahlwortreihe (s.u. Abb 1.13) wird deutlich, dass sich Zählen, ordinales Verständnis und kardinales Wissen nicht trennen lassen. Die Folge der Zählzahlen wird einer Reihe von Objekten zugeordnet und führt so über die zuletzt genannte Zählzahl zur Kardinalzahl der Objektmenge. Zählen ist quasi Voraussetzung, um Kardinalzahlen bestimmen zu können

Im Laufe der Zeit erhalten die Zählzahlen aber selbst kardinale Bedeutung, die Zählzahl 'vier' wird automatisch auch als Kardinalzahl 4 verstanden. Man braucht folglich den ersten Summanden nicht mehr auszuzählen sondern kann dem ersten Element des zweiten Summanden die nächsten Zählzahl zuordnen und sich dennoch sicher sein, dass man alle Elemente berücksichtigt hat. Die Zahlen der Zahlwortreihe sind jetzt Zählzahlen mit gleichzeitig kardinaler Bedeutung, sie werden zur kardinalen Zählfolge. Nach Dehaene (s.o. 1.3.1) entspricht dieser kardinalen Zählfolge aber gleichzeitig intern die analoge Repräsentation der Zahlengrößen.

Damit sind auf der Stufe der bidirektionalen Zahlwortkette, auf der echtes numerisches Zählen möglich ist, alle drei grundlegenden Zahlaspekte, der Ordinalzahlaspekt, der Kardinalzahlaspekt und auch der Größenaspekt, integriert.

Mit zunehmender Sicherheit beim Zählen und Rechnen wird die interne analoge Repräsentation immer wichtiger und kardinale Vorstellungen treten in den Hintergrund - man denkt sich Zahlen, mit denen man operiert nicht mehr als Mengen. Mengen waren nur Spielmaterial, um ordinale Fähigkeiten, die interne analoge Repräsentation und schließlich Automatismen für die ‘Zahlensätze’ zu entwickeln und auszubauen.

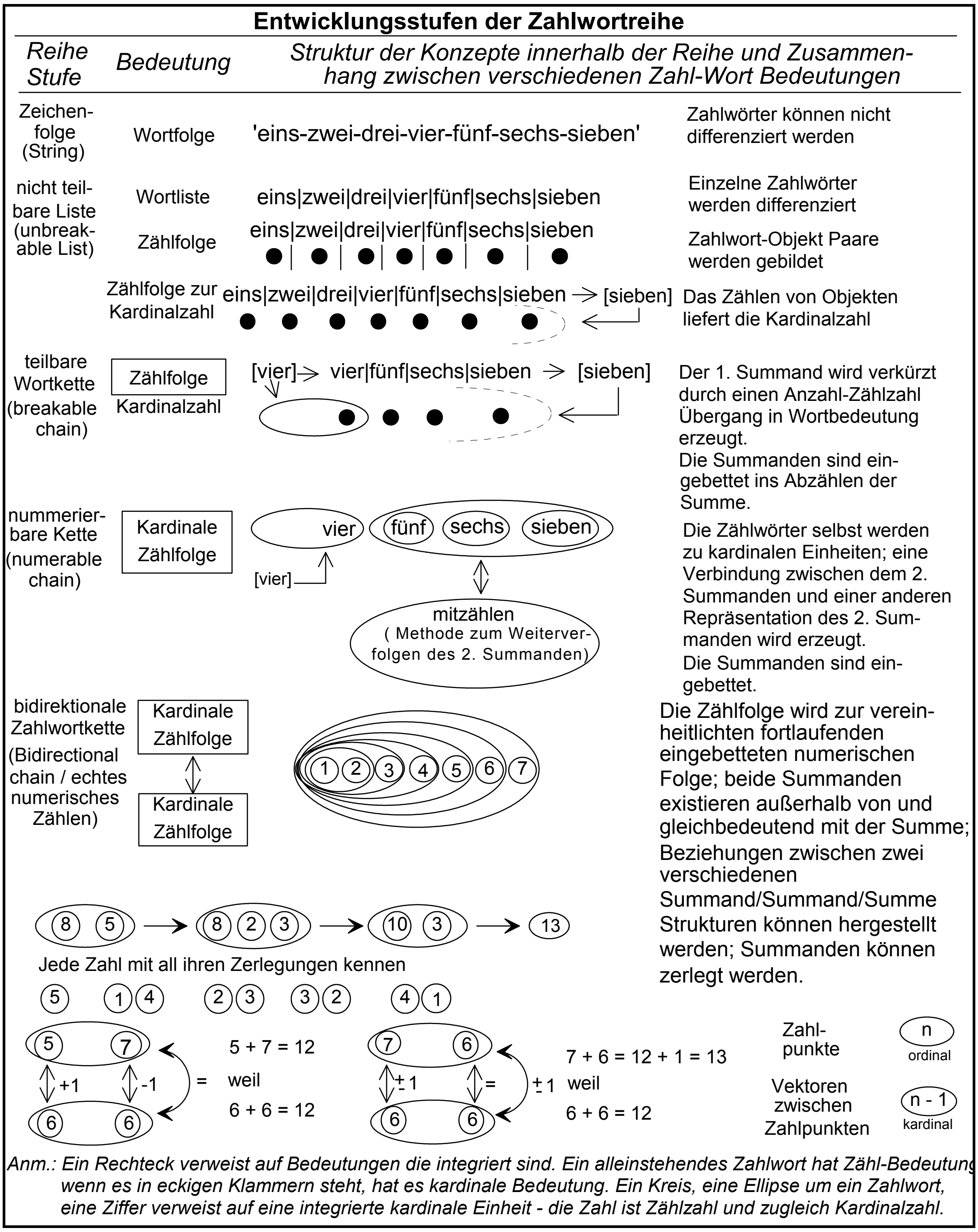


Abb. 1.13: Niveaus beim Zählenlernen n. Fuson, übersetzt v. Autor

Zählen und Rechnen im ersten Schuljahr

Kinder kommen mit entwickelten Zählfertigkeiten in die Schule, wie zahlreiche Studien belegen (vgl. Einleitung Teil 1). Sie nutzen diese Fähigkeiten um damit mathematische Probleme zu lösen und bewegen sich dann mit diesen Zählfertigkeiten in neue Zahlenräume, bis 20, bis 30, ... bis 100, ... (vgl. [SELTER/SPIEGEL 1997, 47-50]). Zählen ist aber immer noch die Hauptstrategie um Aufgaben zu lösen, d.h. Operationen durchzuführen. GEARY [1994 ,143] berichtet von einer Untersuchung mit Schülern der ersten Klasse, die zeigt, dass die Zählfertigkeiten Einfluss darauf haben, ob Kinder geschickte Strategien zum Lösen von Additionsaufgaben auswählen oder nicht.

Im Laufe der Zeit können Teilaspekte einer Rechnung direkt aus dem Gedächtnis abgerufen werden, es muss dann nicht mehr gezählt werden (z.B. 8+5 = <u>8+2</u>+3 = <u>10</u>+3). Geary [1994, 54] spricht von *'derived facts. Children tend to memorize doubles, or tie problems, sooner than other combination... These memorized facts can then serve as the basis for solving other additional problems.'* [a.a.O.]. v.ASTER beschreibt sehr anschaulich, wie dieses Faktenabrufen aus den Zählstrategien hervorgeht: *'Auf diese Weise wird ein 'arithmetisches Netzwerk' aufgebaut, in dem Aufgaben und Lösungen im Bereich bis 20 gespeichert sind und abgerufen werden können. Zähl- und Abrufstrategien konkurrieren miteinander in Abhängigkeit von der Schwierigkeit der Aufgabe. Von Versuch zu Versuch wächst die Assoziationsstärke zwischen einer gewählten Strategie und der zu bearbeitenden Aufgabe an, gleichzeitig aber wächst damit auch die Assoziationsstärke zwischen der Aufgabe und der erhaltenen Lösung an, und damit auch die Wahrscheinlichkeit, dass beim nächsten Mal die Lösung bereits aktiviert (abgerufen) ist, bevor eine Zählstrategie ausgeführt wird.'* [1996, 16f.].

Schließlich werden die Aufgabenlösungen als reine Fakten, losgelöst vom Zählen, aus dem Gedächtnis abgerufen. *'Here Children quickly produce the answer, without overt signs of counting, and state that they just 'knew it' 'know it by heart' or 'remembered'.'* [GEARY 1994, 55]. Die Zählstrategien im Zahlenraum bis 20 verlieren immer mehr an Bedeutung, je häufiger die Aufgabenlösungen über Faktenwissen abgerufen werden. Leider erreichen nicht alle Kinder dieses Stadium, was verschiedene Ursachen haben kann:

Zu viele neue Konzepte werden in zu kurzer Zeit vermittelt:

> *'...school mathematics attempts to convey a great number of procedures and concepts in a relatively brief time, so children have far fewer opportunities to observe or practice the relevant concepts and procedures.'* [RITTLE-JOHNSON/SIEGLER 1998, 107].

Dies führt dazu, dass besonders Kinder, die Schwächen in Mathematik zeigen, die Konzepte nur unzureichend lernen und dann bei der Anwendung häufig Fehler machen. GEARY [1994, 166f.] beschreibt verschiedene Studien, die zeigen, dass Kinder mit Mathematikschwächen (MD) langsamer zählen, aber auch bei der Auswahl von Lösungsstrategien langsamer sind und nicht sehr effektive Strategien wählen. *'In fact, even if speed-of-processing differences exist for some operations, the 'mental slowness' of many MD children appears to be related, to a large extend, to their use of more time-consuming problemsolving strategies in relation to their normal peers'* [a.a.O., 168].

Zählen nur mit 'alles-zählen'-Strategie (sum-Strategie)

Die Grundfertigkeiten des Zählens, vor allem 'counting on'-Strategien, die schnell und effektiv sind, sind nicht gut entwickelt und werden im Unterricht auch nicht thematisiert, da Kinder ja nicht zählend rechnen sollen. Damit dauern Zählvorgänge viel zu lange und brauchen zu viele mentale Ressourcen, so dass Faktenwissen nicht aufgebaut werden kann. Die Assoziation Lösung - Aufgabe kommt nicht zustande, da die Aufgabe schon im Arbeitsgedächtnis verblasst ist, wenn die Lösung gefunden wird (zum Kurzzeitgedächtnis vgl. [BUTTERWORTH 2001, 175ff.]). Da das Kind für jeden Zählschritt ca. 400 ms braucht (siehe [DEHAENE 1999, 145]), benötigt es zur Lösung der Aufgabe 2+8 beim 'counting-all'-Verfahren ca. vier Sekunden während das 'counting-on'-Verfahren beginnend mit der größeren Zahl 8 nur 800 ms dauert. Dies führt dann dazu, dass diese Kinder sich vom Zählen nicht lösen können oder aber häufiger Fehler produzieren, weil die falschen Fakten aus dem Gedächtnis abgerufen werden. *'On the addition task, the MD children committed more than twice as many counting-procedure errors as did the normal children and were more likely to use the counting-all, instead of the counting-on, procedure.The MD children also retrieved fewer facts from memory, and when they did remember an answer, it was more likely to be wrong than not (66% error rate)'* [GEARY 1994, 165].

Sprachliche Probleme

Menschen zählen üblicherweise mental in ihrer Muttersprache. Wenn nun Aufgaben gerechnet werden, müssen bei nicht deutsch sprechenden Kindern zusätzlich noch verschiedene Übersetzungsprozesse ablaufen, diese Kinder sind also benachteiligt (vgl [V.ASTER 1999, 19]).

Hinzu kommt, dass die deutsche Sprache das Zählenlernen durch ihre Syntax nicht fördert (s.o. Zitat DEHAENE [1999, 125]).

Neuere Untersuchungen belegen außerdem, dass Kinder mit Leseschwäche (RD) häufig auch eine Mathematikschwäche (MD) zeigen. Besonders solche Kinder, die Schwierigkeiten mit Buchstabe-Laut Zusammenhängen haben und Wörter schlecht aus dem Gedächnis abrufen können, haben auch Probleme, auf mathematische Fakten zuzugreifen. *'If future research confirms this relationship, then a core memory problem that is independent of IQ, motivation and other factors, may underlie RD and at least one form of MD'* [Geary, 1999].

1.3.3 Zahlenstrahlvorstellungen

Schon LORENZ weist darauf hin, dass Zahlen in irgendeiner Längenrepräsentation in unserer Vorstellung vorhanden sind und dass auch Bewegungsmuster eine Rolle spielen: *'Zahlen existieren im kindlichen Denken unter anderem als Bilder von geometrischen Beziehungen, als Längenrelationen. Das Erleben von Entfernungen ist die Basis der Zahl, das motorische Erobern des Raumes und nicht so sehr das Erfassen von Mengen'* [1993b, 9]. Selbst bei kleinen Zahlen, wo wir uns noch passende Mengenrepräsentationen vorstellen können, spielt immer auch die räumliche Anordnung einen Rolle. *'Numbers do not just evoke a sense of quantity; they also elicit an irrepressible feeling of extension in space.'* [DEHAENE 1997, 80]. Die Experimente von DEHAENE [1997, 64ff.] legen den Schluss nahe, dass mit Zahlen auf einem mentalen Zahlenstrahl operiert wird. *'The finding of an automatic association between numbers and space leads to a simple yet remarkable powerful metaphor for the mental representation of numerical quantities: that of a number line. It is as if numbers were mentally aligned on a segment, with each location corresponding to a certain quantity. Close numbers are represented at adjoining locations.'* [DEHAENE 1997,81]. Manche Menschen können sich Zahlen als Relationszahlen auf einem Zahlenstrahl angeordnet vor ihrem geistigen Auge sogar ganz konkret vorstellen: *'A few of us, perhaps about 14% think of numbers in spatial terms.'* [BUTTERWORTH 1999, 219]. Auch unter Mathematikern ist diese Vorstellung verbreitet, wie DEHAENE unter Hinweis auf deren Biographien scherzhaft bemerkt: *'...kann man sich des Gedankens nicht erwehren, daß einige Mathematiker sich auf dem Zahlenstrahl bessser auskennen als im eigenen Garten'* [a.a.O., 173]. Diese Situiertheit, die Dehaene hier beschreibt ist offensichtlich durch die lange und häufige Beschäftigung der Mathematiker mit den Zahlen entstanden. Für LAKOFF/NUNEZ ist der Zahlenstrahl der Grundschule, eine von zwei möglichen Realisierungen des Zahlenstrahls, eine Vermischung von zwei Konzepten, dem Konzept der Zahl und dem Konzept des Punktes. Diese Metapher beschreibt den Zahlenstrahl mit dem Verbundkonzept 'Zahlen als Punkte auf einer Gerade': *'The number line we learn in elementary school is a conceptual blend - the Number-Line blend - of the source and target domains of this metaphor, in which the entities are simultaneously numbers and points.'* [2000, 279], (siehe auch 2.3.3).

Dieses Verbundkonzept aus Zahl, Punktvorstellung und Längenrepräsentation auf einer Gerade führt aber auch zu Verständnisproblemen. Zu Schwierigkeiten beim Umgang mit dem Zahlenstrahl schreibt LORENZ: *'Für das Verständnis ist ein sicheres Unterscheiden zwischen den Aspekten der Kardinal-, der Ordinal- und der Maßzahl (Striche oder Lücken auf dem Zahlenstrahl) notwendig, wie auch ein eindeutiges Links-Rechts-Orientierenkönnen… Beide Voraussetzungen sind bei vielen Schülern bis zum Ende der Grundschulzeit nicht gegeben. …'* [1993c, 120f.].

In diesem Kapitel geht es aber vorrangig nicht um den 'äußeren' mathematischen Zahlenstrahl sondern um den inneren mentalen Zahlenstrahl, also dieses Modul der Zahlverarbeitung, das die 'analoge Repräsentation der Zahlengrößen' (s.o. Modell DEAHENE Abb. 1.11) sicherstellt.

Der mentale Zahlenstrahl - Eigenschaften

Als mentaler Zahlenstrahl wird die interne analoge Repräsentation von numerischen Größen bezeichnet, die uns, zusammen mit der angeborenen Fähigkeit zum Anzahlerfassen, hilft, Zahlen zu vergleichen, Mengen ungefähr zu schätzen, usw. *'Positive ganze Zahlen finden ein natürliches Echo in der uns angeborenen mentalen Repräsentation numerischer Größen; deshalb kann ein vierjähriges Kind sie verstehen.'* [DEHAENE 1999, 105]. Die numerischen Größen, also die Zahlen, sind räumlich repräsentiert. *' Diese automatische Verknüpfung zwischen Zahl und Raum führt zu einem einfachen, aber bemerkenswert guten Bild für die mentale Repräsentation numerischer Größen in unserem Gehirn, nämlich zum Zahlenstrahl. Es ist, als ob Zahlen im Geist alle auf einer Geraden aufgereiht wären, wobei jeder Ort einer bestimmten Größe entspricht.* [a.a.O., 98].

Die mentale Repräsentation hat natürlich ähnliche Eigenschaften wie der mathematische Zahlenstrahl (vgl. [DEHAENE 1999, 98]). Sie beginnt links mit der Zahl Eins oder mit Null, große Zahlen sind ganz rechts. Benachbarte Zahlen sind auf benachbarten Punkten dieses Strahls angeordnet, wie der Distanzeffekt [a.a.O., 91] zeigt. Der Strahl selbst ist aber kein statisches Bild, er wird dynamisch verändert, angepasst an den jeweiligen Zahlenraum. Die absolute Größe von Zahlen spielt keine Rolle, sondern nur die Größe relativ zum Zahlbereich. Je nachdem, welchen Teil eines Zahlenraums man verwendet, werden die Zahlen eher mit der linken oder mit der rechten Seite assoziiert. Beim Experiment mit den Zahlen 0 bis 5 werden die Zahlen 4 und 5 eher mit der rechten Seite assoziiert, während sie beim Experimentieren mit dem Bereich 4 bis 9 eher mit der linken Seite des Zahlenraumes verbunden sind. Diese räumliche links .. rechts Orientierung ist kulturell bedingt und hängt eng mit der Leserichtung zusammen, die Händigkeit spielt keine Rolle [a.a.O., 99f.]. Beim Abzählen einer Objektsequenz zählen Kinder, vor allem solche, die die Zählprinzipien noch nicht voll verstanden haben, immer von links nach rechts. Beim Zählen mit Körperteilen wird immer mit Fingern begonnen, fünf Finger, also eine Hand ist dann die nächstgrößere Einheit nach der Eins. Zwei Hände, als nächste Gliederungseinheit, ist in einigen Sprachen sogar noch die Bezeichnung für 'zehn' [a.a.O., 113]. Diese Fünfer- / Zehnerstruktur war aber auch in unserem Kulturraum, beim 'Rechnen auf Linien', noch bis ins ausgehende Mittelalter gebräuchlich. BUTTERWORTH [1999, 249] vermutet, dass vor allem der Gebrauch der Finger beim Zählen ganz eng mit der numerischen Repräsentation verbunden ist. *'Finger movements and finger positions are constantly associated with numerical meanings.'* [a.a.O.]

Die Anordnung der Zahlen im Kopf, auf einem mentalen Zahlenstrahl, ist den meisten Menschen nicht bewusst. Einige wenige Menschen haben aber auch ganz konkrete Vorstellungen mit Farben und Formen (siehe [Dehaene 1999, 100]: *'Haben Zahlen eine Farbe?'*). Diese Zahlenstrahl- oder Zahlenraumvorstellungen sind äußerst vielgestaltig und weisen dennoch gewisse Gesetzmäßigkeiten auf, wie zum Beispiel die Tendenz, dass die Distanz zwischen zwei Zahlen im Bereich 0 bis 20, z.B. zwischen 15 und 18, subjektiv viel grösser ist als die objektiv gleiche Distanz im Bereich grösserer Zahlen, wie z.B. zwischen 531 und 534. Zahlenraumvorstellungen weisen also eine zunehmende Kompression bei grösser werdenden Zahlen auf (Weber-Fechner-Gesetz), sie nähern sich einer exponentiellen Folge an. Das hat auch zur Folge, dass genaue große Zahlen, wie z.B. 10234, die ja ungenauer repräsentiert sind, weil sie seltener gebraucht werden als kleine, eher durch runde Zahlen, also Näherungen - in diesem Beispiel 10000 - ausgedrückt werden.

Arabische Ziffern und auch zweistellige Zahlen werden quasi automatisch erkannt und mit der internen Zahlstrahlvorstellung verknüpft. Dies kann man durch ein Experiment nachweisen. Wenn die Ziffer (die numerische Größe) und die Präsentierung (die physikalische Größe) nicht übereinstimmen, löst dies einen Konflikt aus und führt zu langsameren Erkennungszeiten. Das Bild 1 **9** wird schneller größenmäßig beurteilt als **1** 9, weil bei **1** 9 ein kognitiver Konflikt zwischen der internen Zahlvorstellung (1 < 9) und der Präsentierung (das Bild **1** ist größer als das Bild 9) besteht. Dies zeigt, dass die Deutung der Zahlzeichen automatisch erfolgt und dass mit den Ziffern automatisch eine Größenvorstellung verknüpft ist. *'Wir können anscheinend nicht vergessen, dass das Symbol 1 die numerische Größe eins bezeichnet, die kleiner ist als neun.'* [DEHAENE 1999, 95]. BUTTERWORTH zeigt, dass dieser Stroop-Effekt bei allen Altersgruppen beobachtet werden kann [1999, 362].

SOUVIGNIER [2000, 30ff.] referiert verschiedene Ansätze zur Gedächtnisforschung (Paivio, Baddeley, Kulhavy/Lee/Caterino, u.a.) die alle davon ausgehen, dass das Arbeitsgedächtnis mit verbalen und visuell-räumlichen Codierungen arbeitet, also zwei unterschiedliche Speichersysteme hat: einen visuell-räumlichen Notizblock (visuo-spatial sketchpad) und eine phonologische Schleife (phonological loop). D.h., auch im Arbeitsgedächtnis findet man wieder diese visuelle-räumliche und die davon getrennte sprachliche Komponente der Verarbeitung, die auch in Dehaenes Modell der Zahlverarbeitung eine Rolle spielt.

Mentales Operieren

Mentales Operieren ist dann möglich, wenn die drei Module der Zahlverarbeitung für mathematische Prozesse gekoppelt werden können. Ziffern und Zeichen erkennen, passendes Faktenwissen und prozedurales Wissen abrufen und sich dann damit mental auf dem internen Zahlenstrahl sicher bewegen, diesen Verbund von Fähigkeiten kann man als mentales Operieren bezeichnen. Der mentale Zahlenstrahl wird gekoppelt mit Faktenwissen und prozeduralem Wissen, das dann kontextsicher angewendet wird (vgl. [BUTTERWORTH 1999, 334ff.]). Nach STERN [1998, 30] sind mentale Modelle *'nicht Abbilder der Realität, sondern als auf das Handlungsziel bezogene Ausschnitte aus der Realität zu verstehen.'*. Das bedeutet, dass auch der mentale Zahlenstrahl den Kontext abbildet. Die Zahlengrößen im Modul der analogen Repräsentation werden passend zum Kontext um prozedurales und Faktenwissen ergänzt. So entsteht im Arbeitsgedächtnis ein funktionales mentales Modell, auf dem operiert werden kann.

Zählen, das schrittweise Vorwärtsgehen nach rechts auf dem mentalen Zahlenstrahl, ist eine sehr einfache Form des mentalen Operierens. Das Ausnutzen von Nachbarschaftsbeziehungen zwischen Zahlen, z.B. statt 9 + 6 rechnet man 10 + 5, oder das Umkehren der Operation und damit der Bewegung auf dem mentalen Zahlenstrahl in die gewohnte links-rechts Orientierung - statt 17 - 12 = __ rechnet man lieber 12 + __ = 17 - sind schon kompliziertere mentale Operationen. Die gute Koordination der Module zur Zahlverarbeitung zeigt sich auch darin, dass die Repräsentation von Zahlen gewechselt werden kann. Eine Zahl wird als arabische Ziffernfolge erkannt und gleichzeitig können der Name reproduziert sowie Angaben zum größenmäßigen Kontext der Zahl (Nachbarzahlen usw...) gemacht werden. Optimal gelingt mentales Operieren wenn die Zahlvorstellung oder besser *Number Sense* voll entwickelt ist: *'Number sense is difficult to define but easy to recognize. Students with good number sense can move seamlessly between the real world of quantities and the mathematical world of numbers and numerical expressions. They can invent their own procedures for conducting numerical operations. They can represent the same number in multiple ways depending on the context and purpose of this representation. They can recognize benchmark numbers and number patterns: especially ones that derive from the deep structure of the number system. They have a good sense of numerical magnitude and can recognize gross numerical errors that is, errors that are of by an order of magnitude. Finally, they can think or talk in a sensible way about the general properties of a numerical problem or expression -- without doing any precise computation.'* [Gersten/Chard 1999,]. *Number Sense* ermöglicht die Koordination der Module der Zahlverarbeitung mit dem Arbeits- und Langzeitgedächtnis, wobei das sprachverarbeitende Modul und das Modul für die visuell-arabische Repräsentation den syntaktischen Teil der Zahlverarbeitung repräsentieren, während das Modul für die Zahlengrößen eher den semantischen Bereich beim Umgang mit Zahlen abdeckt. Gleichzeitig können in diesem Modul aber auch die angewandten Regeln und die Operationen repräsentiert werden, z.B. 4 halbiert ist 2, 4 verdoppelt ist 8, also muss 8 das Vierfache von 2 sein.

Untersuchungen zur mentalen Animation sind bei der Interpretation von bildhaftem Aufgabenmaterial gemacht worden. SOUVIGNIER [2000, 39ff.] berichtet von Untersuchungen mit Bildern eines Flaschenzugsystems, bei dem die untersuchten Personen Aussagen zur Bewegung und zum Zusammenwirken der Teile machen sollten. Die dabei sukzessive abgearbeiteten Vorstellungsketten werden als mentale Animation bezeichnet. *'Die mentale Animation hat visuell räumlichen Charakter, d.h. es werden Gedächtnisressourcen des visuell räumlichen Notizblocks beansprucht.'* [a.a.O., 43]. Die Animationen wurden immer sequentiell durchgeführt. Personen mit niedrigen räumlichen Fähigkeiten machten mehr Fehler bei einer hohen Belastung des Arbeitsgedächtnisses, was auf eine ineffiziente Verarbeitung der visuell-räumlichen Information hinweist. Es könnte aber auch sein, dass diese Personen einfach nicht so gut auf Fakten zugreifen können, die ja gebraucht werden, um das Modell zu animieren. Dies wurde aber nicht untersucht. Aus dem Bereich der

Mathematik gibt es eine Untersuchung von STIGLER [1984] zum Gebrauch eines mentalen Abakus (*'mental abacus'*). Dabei zeigte es sich, dass viel Training nötig war, bis die Personen ein mentales Bild des Abakus aufgebaut hatten und dann damit, durch mentale Manipulation der Kugeln, einfache und komplexe Berechnungen durchführen konnten. Bei komplexen Rechnungen war aber die Aktivierung von Faktenwissen ausschlaggebend für den Erfolg und nicht 'mental Operieren' können. Mentale Modelle und mentales Operieren sind bei einfachen Operationen denkbar, bei komplexeren dagegen nur mit großem Aufwand möglich und evtl. auch nicht mehr nötig.

Nun darf man sich die gespeicherten Vorstellungsbilder aber nicht wie in einer Bildergalerie vorstellen, durch die man sich bewegt und dabei die Bilder betrachtet. Mentale Bilder sind unscharf und bilden nur die operationalen Zusammenhänge oder Strukturen ab (vgl. 1.1.6). Sie sind quasi die Quintessenz der Charakteristika eines Objekts und der möglichen Operationen mit diesem Objekt. Die Vorstellungsbilder sind dynamisch in zweierlei Hinsicht: sie können je nach Anforderung verändert werden und sie müssen, will man damit arbeiten, jeweils neu konstruiert werden. *'In this context it is important to state that, in the construcitivist view, 'concepts', 'mental representations', 'memories', 'images', etc. must not be thougt of as static but always as dynamic; that is to say, they are not conceived as postcards that can be retrieved from some field, but rather as relatively selfcontained programs or subroutines that can be called up and run.'* [v. GLASERSFELD 1987, 219]. Auf diese Weise entsteht ein ständiger Prozess der Abstraktion, der schließlich dazu führt, dass man neue Abstraktionen aus vorhandenen, ohne Rückgriff auf reales Handeln, erzeugen kann. *'Abstraction, re-presentation, reflection, and conscious conceptualization interact on various levels of mental operating. In the course of these processes, what was produced by one cycle of operations can be taken as given content by the next one, which may then coordinate it to create a new 'form', a new structure; and any such structure can be consciously conceptualized and associated with a symbol'* [v. GLASERSFELD 1991, 63]. Mentales Operieren ist also nicht nur Operieren auf vorgestellten Bildern sondern auch Operieren mit Abstraktionen, wie z.B. mit Operationszeichen wie + , - , * , : , oder später in der Algebra mit Symbolen.

Störungen der visuell-räumliche Wahrnehmung haben Auswirkungen auf das Rechnen. Wenn Kinder keine visuell-räumlichen Repräsentationen erzeugen können, kann es zu Störungen bei der Automatisierung von arithmetischen Operationen kommen. Die Ablösung vom zählenden Rechnen geht schief. *'When first learning to count and with early arithmetic, children often use manipulatives, or fingers, to represent the sets to be counted or added/subtracted... These* *visuospatial representations of number sets help children to understand the task and regulate their own performance (e.g. keep track of the counting). It is therefore reasonable to expect that visuospatial deficits in preschool children might have a more severe impact on the development of basic number and arithmetic skills ...'* [GEARY 1994, 173].

1.4 Zusammenfassung und Folgerungen

Neuropsychologische Modelle

Der in diesem Kapitel im Mittelpunkt stehende mentale Zahlenstrahl ist bei vielen Kindern schon vor Beginn der Schulzeit angelegt. Im Unterricht sollte er dann reichhaltiger und weiter verfeinert werden, d.h. mit den Zahlengrößen sollte weiteres Faktenwissen und prozedurales Wissen verknüpft werden. Die Erkenntnisse der neuropsychologischen Forschung zeichnen natürlich noch kein exaktes Bild von den mentalen Vorgängen beim Mathematiktreiben. Trotzdem reichen die wenigen Forschungsergebnisse aber schon aus, um erste Folgerungen für den Mathematikunterricht ziehen zu können:

- Wissen über Zahlen ist in zwei unterschiedlichen Formaten repräsentiert, einerseits genau und sprachlich und anderseits ungefähr und räumlich abstrakt. Beide Bereiche sind wichtig für einen guten Zahlbegriff, deshalb sollte nicht nur algorithmisches Rechnen, sondern genauso auch Schätzen und Rechnen mit gerundeten Zahlen im Unterricht gepflegt werden. Genaues, algorithmisches Rechnen muss erlernt werden und ist sehr aufwändig, während Schätzen oder ungefähres Rechnen z.T. angeboren ist. Mathematische Regeln müssen auf konkrete Beispiele angewendet werden und nicht nur rein sprachlich gelernt werden ([DEHAENE 1999, 163ff.]: *Die Rolle der Schule*).
- Das Auswendigwissen von Zahlensätzchen des kleinen Einspluseins und Einmaleins ist im eigentlichen Sinn keine mathematische, sondern eine sprachliche Leistung, genau wie das Auswendiglernen von mehr oder weniger unsinnigen Gedichten, die aber Kapazitäten freimacht für weitergehende Entdeckungen im Zusammenhang mit den Rechenaufgaben. Ein Kind das nur mit Mühe, durch Zählen Einspluseins-Aufgaben lösen kann, ist in seinem Tun so gefangen, dass es z.B. kommutative Zusammenhänge zwischen einzelnen Aufgaben gar nicht erkennen kann (vgl. [DEHAENE 1999, 148ff.]: *Das Einmaleins: ein unnatürliches Verfahren*).

- Das Erlernen des arabischen Zahlsystems zu Beginn der Schulzeit kann man mit dem Erlernen einer Sprache vergleichen. Im Gegensatz zum Erlernen der Schriftsprache, also der Zuordnung von Phonemen zum Graphem und Morphem, baut diese mathematische Sprache aber zusätzliche Hürden auf, da es zu jedem gesprochenen Wort (‘[drai]’) eine alphabetische (‘drei’) und eine arabische Schreibweise(‘3’) gibt. Beide Formen, also Zahlwort- und Ziffernschreibweise haben ihre eigenen syntaktischen und grammatikalischen Regeln. Die Kinder müssen außerdem die Übersetzung aus der einen Zahlensprache in die andere erlernen (vgl. [DEHAENE 1999, 121ff.]: *Was das Deutschsprechen kostet*).
- Mathematik treiben ist eher ein Spiel mit Zahlen als das Auswendiglernen von Regeln und Gesetzen. Durch die Vernetzung der verschiedenen Repräsentationsformen entstehen vernetzte numerische Fakten. Mit steigender Vernetzung erkennt man die Strukturen einer mathematischen Welt, die einem dann nicht mehr fremd ist (vgl. [DEHAENE 1999, 170ff.]: *Ein Zoo von Zahlen* und *Die Landschaft der Zahlen*).
- Mathematik treiben kann man nur sicher und gut, wenn man viel und ohne Druck übt. Nur durch Übung werden die Verbindungen zwischen den vielen mentalen Schaltkreisen, die an der Verarbeitung der Zahlen beteiligt sind, immer besser, so dass Ergebnisse schließlich direkt abgerufen werden können. Vor allem Kopfrechnen ist sehr übungsintensiv und die Trainingseffekte verblassen, wenn man die Übung aussetzt ([DEHAENE 1999, 198f.]: *Mathematische Begabung und mathematische Erfindung*).

Zählen

Die in diesem Kapitel zum Zählen referierten Befunde zeigen folgende Ansatzpunkte für den konkreten Unterricht:

- Das Zählen bildet die Grundlage des Rechnens. Die Grundkonzepte des Zählens werden in der Regel vor der Schulzeit ohne Unterricht erworben. Hier könnte man mit vorschulischen Aktivitäten, gekoppelt an die Sprachförderung im Kindergarten, unterstützend arbeiten.
- Durch die Minderbewertung des zählenden Rechnens wird Zählen in der Grundschule nicht gelernt und geübt. Weiterführende Zählstrategien (min) erwerben die Kinder eher zufällig oder gar nicht.
- Bei Aufgaben mit vielen Zählschritten und der falschen Zählstrategie können sich deshalb keine Automatismen ausbilden, die richtige Lösung wird nicht mit der Aufgabe assoziiert.

- Zählen und Anzahlerfassen kann erleichtert werden, wenn man mit strukturierten Mengen (Zahlenmustern) arbeitet und in größeren Schritten zählen kann. Das wird aber erst in Klasse 2 bei der Einführung der Multiplikation thematisiert. Es sollten nur wenige, einprägsame nichtlineare Zahlenmuster für 3, 4 und 5, z.B. ähnlich wie die Würfelbilder, verwendet werden. Größere Zahlen werden additiv gebildet, z.B. $8 = 5 + 3$, $10 = 5 + 5$.
- Nicht deutschsprechende Kinder sind in deutschen Schulen benachteiligt, da sie das Zählen ja in ihrer Muttersprache erlernt haben und nun eine neue Zählsprache lernen müssen.
- Die deutsche Sprache ist für das Zählen aufgrund syntaktischer Unregelmäßigkeiten (elf, zwölf, drei-zehn, ..., vierundzwanzig, ...) nicht gut geeignet. Um das Zählenlernen zu erleichtern, müsste man eigentlich die Zahlwörter so ändern, dass sie zur Ziffernschreibweise passen..

Mentaler Zahlenstrahl

Im Zusammenhang mit dem mentalen Zahlenstrahl und mit dem mentalen Operieren erscheinen folgende Punkte wichtig:

- Der mentale Zahlenstrahl bildet Zahlengrößen ab. Diese sind in Leserichtung, also von links nach rechts angeordnet. Bei größeren Zahlen wird die Anordnung dichter, sie werden komprimiert, aber auch ungenauer.
- Der mentale Zahlenstrahl kann als Verbundkonzept (number - line blend) aus Zahl als Punktvorstellung und Zahl als Größe (Länge) verstanden werden.
- Arabische Ziffern und Zahlen sind automatisch mit der internen Repräsentation der Zahlengrößen verbunden. Größenvergleiche zwischen arabischen Zahlen sind direkt möglich.
- Operieren am mentalen Zahlenstrahl ist dann möglich, wenn alle zahlverarbeitenden Module zusammenwirken und der mentale Zahlenstrahl um Faktenwissen und prozedurales Wissen ergänzt wird.

Folgerungen für das Projekt

Im folgenden Kapitel werden die Computer-Mikrowelten beschrieben, in der die Kinder ihr Wissen über Zahlen und ihren mentalen Zahlenstrahl explizieren sollen. Für die Durchführung des Projektes können nun, ausgehend von den Befunden aus der mathematikdidaktisch-neuoropsychologischen Forschung, schon folgende Anforderungen an die Arbeitsumgebung gestellt werden:

- Die interne Zahlenstrahlvorstellung, also die mentale Repräsentation der Zahlengrößen, ist eine sprachfreie Repräsentierung. Sie ist aber an Längenvorstellung und sicher auch an Bewegungsvorstellung gebunden. Diese Repräsentation ist zu Beginn der Schulzeit schon entwickelt und muss für entsprechende Aufgaben nur aktiviert werden.
- Aktiviert werden kann sie durch die Präsentation von arabischen Zahlzeichnen verbunden mit entsprechenden Bewegungsmetaphern und Metaphern für die Mikrowelt. Deshalb können auch Kinder der ersten Klasse, die noch nicht Lesen und Schreiben können, mit dieser Repräsentierung arbeiten.
- Hilfe beim Arbeiten mit dem mentalen Zahlenstrahl bietet das Zählen, wobei das Vorwärtszählen in Einerschritten gleichzeitig auch die einfachste Strategie ist, um sich auf dem mentalen Zahlenstrahl bzw. auf den mentalen Zahlen zu bewegen. Lautes oder stummes Zählen in der Muttersprache und Entlanggehen am physischen oder am mentalen Zahlenstrahl sollte eigentlich allen Kindern als Strategie zur Verfügung stehen.
- Um diese Strategien zu aktivieren und um gleichzeitig in die Computer-Mikrowelt einzuführen, müssen allen Kindern in einer Einführungsstunde entprechende Metaphern vermittelt werden.

2 LOGO - Computerumgebung und Mikrowelt

In diesem Kapitel werden die Programmierumgebung LOGO sowie die LOGO-Philosophie kurz charakterisiert. Es ist keine Einführung in LOGO und es werden nur die, für diese Arbeit wichtigen Aspekte von LOGO dargestellt. Nach einem kurzen Überblick zur Entwicklung von LOGO wird das System aus zwei Perspektiven beleuchtet, einmal als Programmierumgebung und zum anderen als Mikroweltenumgebung. Anschließend werden die wichtigsten Metaphern in LOGO vorgestellt und mit der Metapherntheorie von LAKOFF/NUNEZ [2002] zusammengebracht, um aufzuzeigen, wie Metaphern auch das Lernen von Mathematik stützen können. Zum Abschluss des Kapitels wird das LOGO-System als Forschungswerkzeug charakterisiert und es werden die im Projekt verwendeten 'Mikrowelten' dargestellt.

2.1 Computersprache und Lernumgebung

LOGO wurde um 1970 am Massachusetts Institute of Technology (MIT) von einer Gruppe von Wissenschaftlern um Papert entwickelt, von Feuerzeig definiert und von diSessa, Abelson, Sussmann, Solomon, Lawler weiterentwickelt. Der Leiter dieser Forschungsgruppe für 'Erkenntnistheorie und Lernforschung' im Labor für 'Künstliche Intelligenz' (KI) war Seymour Papert, der davor bis 1963 bei Piaget in Genf gearbeitet hatte. In das LOGO-Projekt am MIT flossen so Ideen von Piaget und auch aus der KI-Forschung ein. Die Sprache LOGO enthält deshalb Elemente, die es Kindern ermöglichen, in anschaulicher Weise zu programmieren, d.h. ihr Wissen auszudrücken und anzuwenden. Papert hat diese 'Philosophie' gezielt gegen CAI-Techniken (Computer Aided Instruction), wie drill and practice und tutorial gesetzt. Auf der anderen Seite ist LOGO ein syntaktisch vereinfachter und semantisch anschaulicher Ableger der KI-Sprache LISP und damit ein mächtiges Werkzeug, das mehr kann als Igelgrafik. Da LOGO von Anfang an für didaktische Zwecke konzipiert wurde, war die Entscheidung für eine Interpreter-Sprache zwingend, welche eine bestimmte, interaktive Art von 'systematischer Programmierung' fördert. Durch die Entscheidung für einen Interpreter kann auch auf die Deklaration von Typen verzichtet werden. Einzelbefehle werden direkt ausgeführt und Daten können Datenobjekten sofort zugewiesen werden, ohne die Datenobjekte vorher zu definieren. LOGO kennt als Datenobjekte nur Wörter, Zahlen und Listen.

Heute gibt es verschiedene mächtige LOGO-Systeme wie z.B MSWLogo, Imagine, NetLogo, Starlogo, Microworlds, E-slate Logo und Elica-Logo, die z.T. objektorientiert sind, Netzfähigkeiten eingebaut haben, Grafik und Multimedia auf allen Ebenen unterstützen, aber trotzdem noch die LOGO-Ideen realisieren, nämlich das Lernen von Kindern zu fördern und weiter zu entwickeln. Auch in anderen Systemen wie z.B. in Python oder in Squeak, einer Smalltalk-basierten Umgebung, findet man die meisten LOGO-Ideen verwirklicht. Nach wie vor ist die Mehrzahl der LOGO-Systeme als freie Software für jedermann verfügbar (siehe Anhang: [LOGO-Systeme und LOGO-ähnliche]).

PAPERT stand der Schule sehr kritisch gegenüber: *'I think schools do an effective and terribly damaging job of teaching children to be infantile, dependent, intellectually dishonest, passive and disrespectful to their own developmental capacities'*[1984, 20] und sah LOGO und den Einsatz von Computern in der Schule als einen möglichen Ausweg aus dieser Misere. Seine Ideen und Visionen veröffentlichte er 1980 in einem Buch mit dem Titel 'Mindstorms. Children, Computer and Powerful Ideas', das besonders in englischsprachigen Ländern eine breite Diskussion über den Einsatz von Computern im Unterricht auslöste. In diesem Buch entwickelte er seine Ideen und Utopien zum Einsatz des Computers in der Schule und im Mathematikunterricht, die allerdings nicht nur Produkt theoretischer Überlegungen in den Entwicklungslabors des MIT waren, sondern seit Beginn des Projekts in zahlreichen Schulversuchen mit Kindern in der Praxis erprobt wurden. Auch in Deutschland wurden, nach ersten Versuchen in Darmstadt (Löthe), schon ab 1980 an der PH Esslingen (siehe [LÖTHE/PAPERT 1985]) mit einer, auf deutschen Befehlen aufbauenden deutschen LOGO-Version und später an der PH Ludwigsburg, Schulversuche mit LOGO gemacht. Die Ergebnisse dieser Arbeiten wurden in der sogenannten 'Grünen Reihe' der PH Ludwigsburg veröffentlicht. Eine echte Logobewegung wie im englischsprachigen Raum und auch im übrigen Europa (eurologo) gab es aber in Deutschland nie.

Für Papert ist LOGO nicht nur eine Computersprache, die es den Kindern ermöglicht, mit Computern zu kommunizieren, sondern eine Lern-Philosophie, eine Sprache um *'Mathematik sprechen'* zu lernen. Die Programmierumgebung von LOGO bildet die Welt, in der man dies kann, nämlich '*Mathematikland*' und in welchem man Mathematik wie eine lebende Sprache lernt. In dieser Umgebung übernehmen die Kinder eine aktive Rolle, sie sind nicht diejenigen, die vom Computer programmiert werden, sondern sie programmieren, das heißt, sie konstruieren sich am Computer ihre Mathematikwelt selbst. LOGO ist also eine Sprache zum Lernen. Zunächst, um

Programmieren zu lernen, aber auch um Denken zu lernen, oder wie man heute sagen würde: das Lernen zu lernen (vgl. [HARVEY 1984, 21ff.]). Im Folgenden sollen deshalb immer beide Aspekte betrachtet werden, einmal der Aspekt des Programmierens oder des Zugangs zum LOGO-System und auf der anderen Seite der Aspekt des Zugangs zum Lernen allgemein.

2.1.1 LOGO als Programmiersprache

Interaktives Programmieren

Programmieren in LOGO heißt z.B. im Bereich Igelgrafik *'dem Igel ein neues Wort beibringen'* (vgl. [PAPERT 1985, 67]). Dabei wird eine Folge von Befehlen mit einem einzigen neuen Namen bezeichnet, unter dem sie dann aufgerufen werden kann. So kann z.B. die Befehlsfolge

```
wiederhole 2 [vorwärts 50 rechts 90 vorwärts 100 re 90]
```

zum neuen Wort `Rechteck` zusammengefasst werden. Diese Programmierarbeit kann interaktiv durchgeführt werden, d. h. die einzelnen Befehle (z.B.: `vw 50`) und Befehlsfolgen (z.B.: `vw 50 re 90 vw 100 re 90`) können vom LOGO-Interpreter direkt ausgeführt und vom Kind visuell kontrolliert werden. Die korrekten Teile werden dann zu dem neuen Befehl zusammengesetzt. Danach wird das neue Wort (hier: `Rechteck`) getestet. Man erweitert den Sprachschatz des Igels ständig und macht ihn so immer beweglicher und vielseitiger. Die Rolle des Programmierers ist hier eine aktive, er lehrt den Igel neue Wörter, und nicht passiv, wie man es heute noch bei vielen sogenannten Lernprogrammen (eigentlich drill and practice programs) erleben kann. Hinter diesen beiden Polen der Computernutzung stehen natürlich auch ganz unterschiedliche Vorstellungen vom Lernen und vom Kind. Während hinter Drill-Programmen eher behavioristische Vorstellungen stehen, geht Papert mit seinem LOGO-System mehr von konstruktivistischen Paradigmen aus (vgl. Tabelle 3 in: [BAUMGARTNER/PAYER 1994, 100]), wenn er von Kindern als *'Erkenntnistheoretikern'* [PAPERT 1985, 27] spricht.

Aufbau von Hierarchien durch Prozeduren und Funktionen

Jedes neu gelernte Wort kann wieder in andere Befehlsfolgen integriert werden, die 'dem Igel' danach als wieder neue Befehle (Wörter) gelehrt werden können. Auf diese Weise entstehen ganze Hierarchien von Befehlen, bei denen einzelne Teilbausteine zu immer größeren und komplexeren Strukturen zusammengesetzt werden. Durch den modularen Aufbau aus kleinen Teilen und eine gute Verbalisierung durch anschauliche Namen werden auch komplizierte Systeme kontrollier- und überschaubar. Manchmal kann man aber gar nicht aus einfachen Bausteinen ein komplexes Programm aufbauen (bottom up), sondern man hat ein Problem und soll für dieses eine Lösung suchen. Auch hier bietet das LOGO-System aufgrund seiner Modularität die Möglichkeit mit einer groben Problemlösung anzufangen, diese zu testen und dann schrittweise durch entsprechende Teilmodule auszubauen und so zur Lösung zu bringen (top down). Auch weitere Methoden systematischer Entwicklung wie rapid prototyping werden leicht möglich.

Jedes Mal, wenn man in LOGO einen neuen Befehl einbaut, schreibt man eine Prozedur. Wenn eine Prozedur eine Ausgabe hat, spricht man von einer Funktion. Die meisten Befehle im Bereich der Igelgrafik sind Prozeduren. Es gibt natürlich auch Abfragen des Igelzustands wie z.B.: Ort oder Kurs , die beide Funktionen ohne Eingabe sind. In der Regel wird man aber, sobald man Funktionen einführt, den Bereich der Igelgrafik verlassen. Der Übergang zu Funktionen, also zum applikativen und funktionalen Programmieren, bedeutet den Übergang auf ein neues Niveau.

Es ergibt sich ein Paradigmenwechsel vom Denken in Befehlen an den Igel zum funktionalen Denken. Denken in Befehlen, also das Paradigma des imperativen Programmierens, wird abgelöst durch das Paradigma des funktionalen Programmierens, bei dem Funktionswerte beschrieben werden.

Imperatives Programmieren - Befehle geben:

Idee / Aktion	LOGO-Befehl
Igel, gehe 50 Schritte vorwärts!	`vorwärts 50`
Igel drehe dich um 90 Grad nach rechts!	`rechts 90`
Igel ziehe deinen Zeichenstift hoch!	`stifthoch`
Igel gehe zur Bildmitte!	`mitte`

Tab. 2.01: Beispiele: Imperatives Programmieren

Funktionales Programmieren - den Funktionswert benennen:

Idee / Aktion	LOGO-Befehl
Der Igel soll seine Richtung angeben	`Richtung`
Eine Funktion, die 5 quadriert	`Quadratzahl 5`
Eine Funktion, die aus einer Liste zufällig ein Element zieht	`Zel [2 3 4]` `Zufallselement [2 3 4]`

Tab. 2.02: Beispiele: Funktionales Programmieren

Nicht mehr der Igel, der kommandiert wird, zeigt Reaktionen, sondern die Maschine bzw. die jetzt neu geschaffenen Funktionen liefern ein Ergebnis, einen Funktionswert. 'Kommunikation' oder Datenaustausch findet nicht mehr nur zwischen Nutzer und Igel bzw. Computer statt, sondern zwischen den Funktionen, also zwischen Computerprogrammen. Für die Nutzer bedeutet dies, dass sie jetzt nicht mehr wie bisher direkt ihre Reaktion und ihre Gedanken auf das Igelmodell übertragen können (direkt kommunizieren), sondern sie müssen quasi auf einer Meta-Ebene darüber nachdenken oder den Computer instruieren, wie die einzelnen Funktionen miteinander zu kommunizieren haben, damit das Programm reibungslos abläuft.

Um diesen Schritt zu erleichtern, verwendet man wieder anschauliche Modelle wie z.B.: Maschinenbausteine mit Eingabetrichter(n) und einem Ausgabetrichter, die dann wie die Grundbefehle zu einem System verbunden werden können. Häufig wird auch die Vorstellung von Agenten, die miteinander kommunizieren verwendet. Das Arbeiten mit Funktionen erlaubt so auch die Formulierung von Problemlösungen, die völlig ohne globale Variablen auskommen, d.h. die Daten werden in den Funktionen generiert oder verändert und dann an die folgenden Funktionen übergeben. Die Prozeduren und Funktionen in einer LOGO-Umgebung können sich aber nicht nur gegenseitig aufrufen und beeinflussen, jede Prozedur und jede Funktion kann sich auch selbst aufrufen. Diese Fähigkeit zur Rekursion macht es möglich, in LOGO ganz kurz und elegant sehr mächtige Programme zu schreiben.

Daten, Typen und Variablen

Schon bei der Igelgrafik taucht sehr bald der Wunsch auf, nicht jedes Mal, wenn man ein Quadrat anderer Größe zeichnen will, eine neue Prozedur, ein neues Wort, als Befehl definieren zu müssen. Also führt man das Variablenkonzept ein, man modifiziert den Befehl durch Variablen, z.B.:

- Langfassung: ‘Zeichne ein Rechteck aus Länge und Breite’
- Kurzfassung: `Rechteck :Länge :Breite`
- Prozeduraufruf: `rechteck 100 20`

Man benutzt also ein Symbol oder besser einen aussagekräftigen Namen, um eine noch unbekannte Größe zu benennen. Dabei spielt es in LOGO keine Rolle, was später konkret für diese Variable eingesetzt wird. Dies kann eine Zahl, eine Liste oder ein Wort sein. Der Typ der Variablen spielt überhaupt keine Rolle im Gegensatz zu Programmiersprachen wie z.B. Pascal, C oder Java. Die Typenlosigkeit in LOGO führt zu einem sehr flexiblen, fast spielerischen Umgang mit Daten. Was zu Beginn eines Programms eine Zahl war, kann danach als Zahlwort oder später als Liste mit einzelnen Ziffern interpretiert werden. Durch die Variablenbindung werden Daten an einen bestimmten Kontext gebunden, was wiederum stark menschlichen Denkmustern entspricht.

Zur Unterscheidung von Programmnamen und Befehlen wird vor Variablen ein Doppelpunkt gesetzt (z.B.: `pr rechteck :länge :breite`). Um das Konzept zu verdeutlichen, kann man hier die Metapher von den *Agenten* [PAPERT 1985, 78f.] benutzen. Wenn man den Befehl `rechteck` gibt, ruft man den rechteck-Agenten auf den Plan. Ihm muss man gleichzeitig mitteilen, welche `:länge` und welche `:breite` das Rechteck haben soll, damit dieser den vorwärts-Agenten und den rechts-Agenten, die den Igel beim Zeichnen steuern, entsprechend informieren kann. Diese Metapher unterstützt auch die Vorstellung der lokalen, gebundenen Variablen. Die Werte für `:länge` und `:breite` werden auf Zettel notiert und sind nur den Agenten bekannt, die diese Zettel bekommen. Wenn man eine Variable allgemein bekannt machen will, muss man sie veröffentlichen. Dies geschieht mit dem Befehl `setze` (z.B.: `setze "füralle 25`).

Daten werden durch Variablen bezeichnet und als Wort oder Zahl oder auch in einer Liste oder einem Satz gespeichert. Besonders die Liste, als Kollektion von einzelnen Daten, bietet im Gegensatz zum indexangesteuerten Array eine sehr flexible Möglichkeit, auf sich verändernden Daten zu arbeiten. In derselben Liste können in einem Moment fünf Zahlen als Elemente stehen, um diese dann im nächsten Moment in fünf Sätze umzuwandeln. Dieselbe Liste kann dann erweitert werden, so dass nun 50 Sätze enthalten sind. Man kann mit den gleichen einfachen Listenoperationen Datensammlungen, die ein Programm erzeugt hat, solche die aus einer Datei gelesen wurden oder selbst die momentan in der Umgebung vorhandenen Prozeduren und Funktionen bearbeiten und modifizieren. Das bedeutet, auch Prozeduren und Funktionen können Daten sein und Daten können Prozeduren und Funktionen sein. Eine Funktion kann aus den anfallenden Daten eine neue Funktion erzeugen und starten. Sie kann Daten, die in eine Datei gespeichert und wieder eingelesen werden, im LOGO-System zu Prozeduren und Funktionen, d.h. zu lauffähigen Programmen umwandeln. Diese können außerdem noch automatisch gestartet werden. Während der Arbeit in den Mikrowelten werden z.B. Daten über die Igelkoordinaten protokolliert. Die Daten werden ergänzt und damit lauffähige Programme erzeugt:

Daten	ergänzte Daten in Datei	Ausführung als Programm

[299 -3 0]	`[aufxy 299 -3]`	Datei auslesen und ausführen
		`wenn eofp [rückkehr]`
		`tue liesliste`

[321 -1 0]	`[aufxy 321 -1]`	
[318 -2 1]	`[aufxy 318 -2 klick]`	

Tab. 2.03: Daten und Programme

Die Daten werden aus der Datei zeilenweise als Liste ausgelesen (`liesliste`) und sofort interpretiert (`tue liesliste`). Wenn das Dateiende erreicht ist (`eofp`) wird das Programm beendet (`rückkehr`). Der Igel springt jeweils zum angegebenen Punkt (`aufxy 318 -2`) und zeichnet so seine Spur.

Die vorher beschriebenen Merkmale machen das LOGO-System zu einem mächtigen Werkzeug zur Erstellung von Prototypen und Explorationsumgebungen. Diese können während der Erprobung laufend angepasst und erweitert werden, da man in jeder Phase Zugriff auf das gesamte System mit allen Daten hat. Die Tranzparenz des Systems ermöglicht außerdem verschiedene Sichten auf dieselbe Umgebung. Man hat neben der Nutzersicht auch immer die Systemsicht. Man kann als Nutzer arbeiten und bei Bedarf in die Rolle des Systemprogrammierers wechseln, um die Nutzerumgebung schnell zu modifizieren. Anschließend kann man wieder normal in der veränderten Nutzerumgebung weiterarbeiten.

Da man das gesamte LOGO-System kontrollieren kann, ist es relativ einfach, als Lehrender die Umgebung so zu gestalten, dass auch unerfahrene Nutzer problemlos damit arbeiten können. Aus den vorgenannten Gründen ist das LOGO-System das ideale Forschungswerkzeug um damit Feldforschung mit dem Computer zu betreiben und über den Computer und das Lernen zu forschen.

2.1.2 LOGO als Sprache um das Lernen zu lernen

Papert ging es von Beginn an nicht darum, dass Kinder zu Programmierern werden, sondern dass sie eine Umgebung angeboten bekommen, in der sie bedeutsame Ideen (z.B. aus der Mathematik oder aus der Sprache) explorieren und lernen können. Auch die neueren Veröffentlichungen von PAPERT [1992, 1994, 1998] beschäftigen sich nicht mit dem Programmieren, sondern mit dem Lernen der Kinder in einer sich verändernden Welt. Papert verwendet für dieses Wissen über das Lernen den Begriff mathetisch: *'… möchte ich das Substantiv Mathetik für eine Unterweisung in der Kunst des Lernens verwenden.'* [PAPERT 1994, 105]. Wie Papert weisen auch viele andere Autoren darauf hin, dass man mit LOGO das Lernen lernen könne: *'Logo ist vor allem eine Sprache für Lernende'* [HOPPE/LÖTHE 1984, 3] oder *'Logo, though, was developed as a learning language, not for a specific branch of mathematics, but for problem-solving behavior'* [HARVEY 1984, 31]. Es gibt aber auch kritische Meinungen: *'Logo today is in a more ambigous position, with one foot in the world of powerful mathematics* *and the other foot in the mainstream computer-education world of multimedia and the World Wide Web'* [Harvey 2001, 28]. Allen Autoren ist aber klar, *'dass mit den neuen Medien ein Umbruch beim Lernen stattfindet. Der Schwerpunkt verlagert sich dabei weg von der Passivität der Lernenden hin zu einer Aktivität, mit der Wissen konstruiert wird. Entscheidend hierbei sind die Lernsituationen, die genügend Freiheit, aber auch Anregungen und Bezug zum Leben haben sollten, damit sich das Lernen entfalten kann'* [Aufenanger 1999, 19].

Igel, Igelgrafik und Igelgeometrie

Der wohl bekannteste und anschaulichste Bereich des gesamten LOGO-Systems ist die Igelgeometrie (im engl. Sprachraum,'turtle-geometry' siehe [Abelson/diSessa 1981]), die es aber leider den Kritikern ermöglicht, LOGO als Spielerei für Kinder abzuqualifizieren. Da dieser Bereich reich an Metaphern ist, eignet er sich besonders, um einen anschaulichen Zugang zum Programmieren und zum Lernen zu vermitteln. Aus diesem Grund greifen auch viele andere Programmiersprachen die Igelgrafik und die damit zusammenhängenden Metaphern auf. Ein neueres Beispiel, bei dem die Igel-Metapher von LOGO genutzt wird, ist Jurtle (Java+Turtle=Jurtle), eine Umgebung um Java Programmierung zu lernen. Die Igelgrafik selbst ist frei von kartesischen Koordinaten, deshalb funktioniert der LOGO-Igel so, wie man sich selbst bewegen würde: man geht Schritt für Schritt vorwärts oder rückwärts und man kann sich auf der Stelle nach links oder nach rechts um die eigene Längsachse drehen.

Der Einstieg mit der Igelgrafik geht von folgenden Vorstellungen aus:

- es gibt Objekte , Dinge oder kybernetische Tierchen (⇨ Igel)
- diese haben Fähigkeiten, können etwas tun (⇨ Prozeduren/Funktionen)
- sie haben ein Wissen über sich und ihre Umgebung (⇨ Datenhaltung)
- man kann Aufträge bzw. Befehle an sie senden (⇨ Prozeduren)
- man kann Anfragen machen, die sie beantworten (⇨ Funktionen)
- man kann für sie eine Umgebung (Mikrowelt) entwickeln und ihr Verhalten verändern (⇨ Programmieren)

Die Igelgrafik als Einstiegsumgebung bietet sich an, da sowohl bei der direkten Ausführung von Befehlen im Befehlseingabefenster, wie auch bei der Ausführung von Prozeduren sofort eine sichtbare Rückmeldung erfolgt - der Igel bewegt sich und macht was er soll oder eben nicht. Im ersten Fall kann man die Umgebung weiterentwickeln, im zweiten Fall muss die Prozedur korrigert werden. Auf diesem Weg kann man dann das LOGO-System ständig erweitern und ausbauen und bis zu sehr komplexen grafischen Strukturen vorstoßen. Kinder, die damit arbeiten, lernen einen Arbeitsstil, wie er beim Problemlösen gefordert wird. Man durchläuft einen Lösungskreislauf so lange, bis man mit der erreichten Genauigkeit der Lösung zufrieden ist oder erkennt, dass man einen neuen, anderen Problemlöseansatz verfolgen muss.

Beim Einstieg mit der Igelgrafik hat sich folgende Vorgehensweise in vier Stufen bewährt:

1) Konstituierung eines anthropomorphen Modells für den Igel, indem man selbst Igel spielt:

- Was macht ein Roboter? Wie bewegt man einen Roboter?
- Blinde - Kuh mit 'Befehle geben' spielen (Blindlaufen)
- Rollenstuhl schieben lassen auf dem man sitzt und selbst kommandieren oder Zuschauer kommandieren lassen: z.B. gehe 5 Schritte vorwärts !
- Dabei Einführung der Grundbefehle und der verkürzten Notation für diese Grundbefehle

Bewegungsmuster	Logobefehl	Abkürzung
gehe vorwärts … 5 Schritte	`vorwärts 5`	`vw 5`
gehe rückwärts … 5 Schritte	`rückwärts 5`	`rw 5`
drehe dich nach links um 90°	`links 90`	`li 5`
drehe dich nach rechts um 90°	`rechts 90`	`re 5`

Tab. 2.04: Grundbewegungen des LOGO-Igels

2) Probierphase, freies Spiel mit dem LOGO-Igel.

- Das Erlebnis des 'Befehle gebens' haben.
- Experimentieren mit den Befehlen.

3) Geometrische Figuren gezielt entwerfen durch

- sequentielle Abfolge von Befehlen.
  `vw 100 re 90 vw 100 re 90 vw 100 re 90 vw 100 re 90`
- die Kontrollstruktur `wiederhole (wh)`.
  `wh 4 [vw 100 re 90]`

4) Zusammenfassen und benennen von Befehlsketten.

Die Befehlskette `wh 4 [vw 100 re 90]` wird mit dem Namen des durch sie erzeugten Objekts benannt:

```
pr Quadrat
```

```
  wh 4 [vw 100 re 90]
ende
```

Statt der langen Befehlskette sagt man dem Igel nun einfach zeichne ein `Quadrat`.

Igelgeometrie ist aber mehr, als das Erzeugen einfacher Linienfiguren. Man kann damit in verschiedene Bereiche der Geometrie sehr weit vordringen. Ideenreiche geometrische Ausgestaltungen des Igels und der Igelmetapher findet man z.B. bei LÖTHE [1992], KYNIGOS [1992] oder BOYTCHEV [2003], aber auch schon bei PAPERT[1984, 133ff].

Igelgrafik eignet sich nicht nur dazu, Programmieren und Denken zu lernen, sondern bietet auch die Möglichkeit, in einer Forschungsumgebung mit wenigen Befehlen Daten einzulesen und dann grafisch darzustellen. Außerdem können Aktionen von Kindern in einer LOGO-Umgebung in Form von LOGO-Befehlen in Dateien gespeichert werden. Man erhält so eine Art capture - remote Fähigkeit, da die Dateien nichts anderes als textuelle Repräsentierungen von Grafik und Bewegung sind, die man dann bei Bedarf wieder laden und abspielen kann, da es in LOGO keine Unterscheidung zwischen Daten und Funktionen oder Prozeduren gibt.

2.2 Lernen in Mikrowelten

Hinter der Mikrowelten-Idee steht die Lerntheorie des Konstruktivismus. Wissen über die Dinge muss vom Lerner selbst im aktuellen Erkenntnisprozess konstruiert werden. Damit ist Konstruktivismus keine Theorie des Seins, sondern eine Theorie der Genese des Wissens von den Dingen. Konstruktivismus ist damit das Pendant zur Mathetik, nicht die Lehre von der Kunst des Lernens, sondern das individuelle Lernen selbst. Papert spricht von Mikrowelten als *'Brutkästen für Wissen'*[PAPERT 1985, 126] oder als *'Gewächshaus für schlagkräftige Ideen'*[PAPERT 1985, 131] und meint damit Teilumgebungen einer Wissenschaft, eines Lernbereichs, in denen die Kinder selbständig Erfahrungen sammeln und Wissen anwenden und erwerben können. Die Rolle der Lehrperson beschränkt sich darauf, Hilfen oder Anstöße zu geben, also auf Reaktionen und nicht auf Instruktionen, was Lawler so ausdrückt: *'How can we instruct while respecting the self-constructive character of the mind?'*[LAWLER 1984, 41]. Während Papert Mikrowelten dadurch erklärt, dass er Beispiele aufzeigt, findet man bei Lawler eine prägnante Definition: *'Microworlds are in essence 'task domains' or 'problem spaces' designed for virtual, streamlined* *experience. These worlds encompass objects and processes that we can get to know and understand.'*[LAWLER 1984, 41]. Lawler weist auch darauf hin, dass eine Mikrowelt für den Nutzer sehr einfach zu verstehen sein muss und nicht alles Wissen, das in ihr steckt, auf den ersten Blick preisgeben darf, wenn selbstbestimmt konstruktivistisch gelernt werden soll. *'A well-designed computer microworld embodies the simplest model that an expert can imagine as an acceptable entry point to richer knowledge'*[LAWLER 1984, 41]. Weitere Beschreibungen von Mikrowelten als *'artifizielle explorative Lernumgebungen mit eigenen Regeln'* findet man bei SCHULMEISTER[1997, 51ff.]. Allen Mikrowelten ist gemeinsam, dass sie das zu lernende Wissen in der Mikrowelt verstecken und den Schülern Gelegenheit geben, es wieder auszugraben. Schulmeister weist auch darauf hin, dass in diesen Umgebungen hauptsächlich exploratives Lernen stattfindet, bezweifelt aber, dass in LOGO erlerntes Explorieren tatsächlich transferiert werden kann. Trotz dieser Kritik zählt Schulmeister das *'Lernen mit Mikrowelten'* zusammen mit dem *'entdeckenden Lernen'* zu den beiden grundlegenden pädagogisch-methodischen Konzepten des Konstuktivismus [a.a.O. 71]. Lernen in Mikrowelten bietet dem Lerner mehr Möglichkeiten, stellt aber auch höhere Ansprüche - *'Das Mikrowelten-Konzept ist freier, es präsentiert eine Interaktionsumgebung, in der es etwas zu entdecken gilt. Das Konzept verlangt vom Lernenden eine Hypothesenbildung und fordert von ihm das Experimentieren mit diesen Hypothesen.'*[SCHULMEISTER 1997, 188].

Damit wird klar, dass Mikrowelten nicht nur bereitgestellt werden, damit Lernende selbständig etwas über ein Wissensgebiet erarbeiten, sondern auch um etwas über die Lernprozesse, die dabei ablaufen und die damit verbundenen Vorstellungen zu lernen. Dazu muss man nur beobachten, wie die Lernenden in der Mikrowelt mit ihren Hypothesen experimentieren. Folglich muss die Mikrowelt so gestaltet sein, dass die Lernenden ihre Denkprozesse und Hypothesen explizieren, um diese dann aufzeichnen zu können. Falls das gelingt, hat man eine Mikrowelt, in der Lernende lernen und in der man gleichzeitig bestimmten Forschungsfragen zum individuellen Lernen nachgehen kann.

2.2.1 LOGO - eine Lernumgebung für die Schule?

Im letzen Absatz (2.1.2) wurde versucht, aufzuzeigen, dass man mit LOGO didaktische, reichhaltige Lernumgebungen oder, um in der Sprache der LOGO-Philosophie zu bleiben, Mikrowelten für das Lernen einrichten kann. Bei ausreichender Kenntnis des LOGO-Systems, einer grundlegenden informatischen Qualifikation und didaktischem Grundwissen wird LOGO zum

Mikrowelten-Baukasten vom Kindergarten bis zum Gymnasium. Trotz aller vorher beschriebenen Vorteile, die der Einsatz von LOGO in der Schule mit sich bringt, sieht die Realität in den Schulen aber ganz anders aus. Die meisten Grundschulklassen sind zwar mit Computerarbeitsstationen ausgestattet, diese werden aber von der Mehrzahl der Lehrkräfte nicht oder nur eingeschränkt, nämlich nur für Lernprogramme genutzt. LOGO wird in den Schulen Deutschlands kaum eingesetzt und ist bei Grundschullehrern weitgehend unbekannt. Dass dies so ist, hat viele unterschiedliche Gründe, weshalb es auch schwierig ist, in diesem Bereich etwas grundlegend zu ändern.

In einem Buch zu Freiarbeit in der Grundschule kann man lesen: *'Freie Arbeit zu praktizieren, heißt für den Lehrer, in dieser Unterrichtsform seinen allgegenwärtigen Regiestuhl zu verlassen und seine traditionell direktive Haltung aufzugeben'* und weiter: *'Es ist selbstverständlich, daß der Lehrer die Handhabung und die Regeln aller eingesetzten Materialien und Spiele kennt'*[BREUER 1992, 24f.]. Wenn man hier 'Freie Arbeit' durch 'Arbeiten mit LOGO in Mikrowelten' und 'aller eingesetzten Materialien und Spiele' durch 'des LOGO-Systems' ersetzt, trifft dies genau den Kern der Kritik. Das Arbeiten mit LOGO in Mikrowelten widerspricht der Unterrichtstradition in Deutschland und die Lehrenden müssten das LOGO-System zunächst selbst beherrschen, bevor sie im Unterricht damit Mikrowelten für Schüler organisieren können. Lehrer müssten also selbst mit LOGO arbeiten und eigene Lernerlebnisse haben.

Diese vorher angesprochene Unterrichtstradition hat viele Facetten, die aber alle der LOGO-Philosophie widersprechen. Dies wird schon deutlich, wenn man nur den Sprachgebrauch im Schulkontext betrachtet. Da gibt es 'Klassenlehrer' oder 'Mathematiklehrer', also Lehrer die für die gesamte Klasse oder ein Fach zuständig sind. Die Klasse wird als Einheit gesehen und unterrichtet bzw. das Fach mit seinen Inhalten steht im Fokus, die Schüler sollen fachliches Wissen erwerben. Der Fachunterricht orientiert sich an den Inhalten des Faches und den tradierten didaktischen Stufen, weniger an den Interessen der Kinder. Weiter spricht man davon, dass ein 'Lehrer die Klasse führt', er nimmt die 'unselbständigen' Kinder an die Hand und führt sie irgendwohin und zwar alle gemeinsam, als Klasse. Hier wollen die neuen Bildungsstandards mehr Freiraum geben, es werden Bildungsziele für Schüler festgelegt, es wird aber nicht vermittelt, wie diese Ziele von den Schülern mit Hilfestellung des Lehrers erreicht werden können. Die auch heute noch vorherrschenden ärmlichen didaktischen Vorstellungen beschreibt Arenhövel in seinem Buch zum Computereinsatz in der Grundschule ungewollt sehr treffend: *'Erst wenn die mathematischen Begriffe, Beziehungen und Operationen 'begriffen' sind,* *wenn die Kinder in der Lage sind, Strukturen zu erkennen, wenn einsichtiges Lernen eingesetzt hat, kann die Automatisierung der Fertigkeiten beginnen.... Und bei dieser Automatisierung hilft mir der Computer, helfen mir die Mathematikprogramme.'*[ARENHÖVEL 1994, 39].

Offene Unterrichtsformen haben erst in den letzten Jahren in größerem Stil in der Schule Einzug gehalten. Lehrer, die offenen Unterricht praktizieren, kommen aber eher aus der Freinet-, der Montessori- oder der Reformpädagogik und sind deshalb stark am Einsatz realer Materialien orientiert. Computernutzung in Computerlabs wie sie in USA oder England üblich ist, hat an deutschen Schulen keine Tradition. Diese Arbeitsform wäre aber zwingend damit Schüler in Computermikrowelten, wie sie LOGO bietet, arbeiten können. Weiter wäre zu fordern, dass sich das Mikroweltenkonzept und die Vorstellung von Freiarbeit, die stark materialdominiert ist, annähern. Wünschenswert wäre eine Verallgemeinerung, auf Unterrichtsarrangements, die es Schülern ermöglichen, selbständig einen Lernbereich zu erarbeiten. Dann könnten Schüler in einem Lernzirkel, an einer Station z.B. Erfahrungen mit realen Gewichten und an der nächsten Station in einer Mikrowelt z.B. Erfahrungen mit einer virtuellen Waage machen. Beide Bereiche, reale Handlungen und virtuelle Handlungen könnten sich so sinnvoll ergänzen.

Die zweite Forderung, dass Lehrer das LOGO-System selbst beherrschen sollten, bevor sie es im Unterricht einsetzen, ist die größere Hürde, die Mikrowelten in der Schule verhindert. Durch die o.g. Fokussierung auf reale Materialien für offene Lernformen und die starke Fixierung auf die e-i-s-Didaktik ergibt sich kein Bedarf an einem zusätzlichen 'Lernmaterial'. Der Lehrer hat ja alles, was er braucht um sein e-i-s-Schema zu füllen: reale Materialien sowie Bilder und Rechenaufgaben in den Schulbüchern. Weiter unten werden wir aber zeigen, dass die e-i-s-Stufung Lücken hat, die gerade durch den Einsatz von Mikrowelten gefüllt werden können.

Selbst wenn Lehrer sich in LOGO einarbeiten wollten, haben sie dazu kaum eine Chance, angesichts der immer wieder neuen 'Innovationswellen', welche die Schulen überrollen. Es bleibt keine Zeit, neue Techniken auszuprobieren und didaktisch zu integrieren, da ist schon die nächste Innovation verordnet. Nach der Lernprogramm-, und der Multimedia- sind wir nun bei der Internet-'Innovation', die auch noch gleichzeitig mit anderen tiefgreifenden Reformen über die Schule hereingebrochen ist. Weiter muss man feststellen, dass Lehrkräfte nicht dafür ausgebildet sind, mit dem Wandel, den solche 'Innovationen' bringen, umzugehen. Ihnen fehlen grundlegende informatische

Kenntnisse und sie haben nicht gelernt, selbst forschend zu arbeiten um so 'Innovationen' auf ihre Tauglichkeit prüfen zu können.

Ein letzter Grund, warum sich LOGO nicht in den deutschen Grundschulen etablieren konnte, mag auch sein, dass es zu früh kam. Damals waren Computer in Grundschulen 'verboten' oder allenfalls geduldet und deshalb konnte sich auch keine Computerkultur an den Grundschulen entwickeln. Dass dies in anderen Ländern anders ist, zeigt der Arbeitskreis Grundschule, der sich inzwischen des Themas angenommen hat und Ideen zum sinnvollen Computereinsatz in der Grundschule entwickelt. Was am Computer als System von Hard- und Software aus pädagogischer und didaktischer Sicht neu ist, wird an Ergebnissen aus weltweit durchgeführten Unterrichtsversuchen deutlich gemacht (vgl. [MITZLAFF/SPECK-HAMDAN 1998]).

Heute liegt der Fokus der Innovation bei der Computernutzung eher im Bereich Multimedia und Internet und nicht auf dem Lernen in Mikrowelten. Dabei liegen die Stärken der Computernutzung in der Grundschule meiner Meinung nach nicht in der Vernetzung von Medien oder in der weltweiten Computervernetzung, sondern vor allem in den Möglichkeiten, durch Computer dynamische, veränderbare Systeme (Mikrowelten) zu schaffen. Man könnte dynamische Bilder oder Visualisierungen anbieten, nämlich solche, die manipulierbar und veränderbar sind. Dies fehlt in der traditionellen e-i-s-Didaktik, wo Materialhandlungen dynamisch sind und wo danach in der Regel, da hauptsächlich mit Büchern gearbeitet wird, statische Bilder, die nicht manipulierbar sind, genutzt werden. Diese statischen Bilder sind zudem mehrdeutig [vgl. VOIGT 1993, 148 ff.], und deshalb oft rätselhaft. Die Kinder reagieren hilflos oder nach einem vorgegebenen Schema. Auch das könnte man durch dynamische Grafiken, mit vorbestimmtem 'Verhalten', ändern. Es bleibt eine 'didaktische Lücke', die man z. B. durch Mikrowelten in LOGO schließen könnte. In diesen Mikrowelten können Schüler dann handlungsnahe, also nah an der enaktiven Ebene liegende Operationen machen, die aber nicht den Beschränkungen realer Handlungen unterworfen sind. Gleichzeitig, obwohl ikonisch, weisen die Mikrowelten aber nicht die Beschränkungen der statischen Bilder in den Schulbüchern auf. Schüler können z.B. virtuelle Mehrsystemblöcke nutzen,

- deren Vorrat nie ausgeht.
- die bei Bedarf in kleinere Einheiten zerteilt werden können oder sich zur nächsthöheren Einheit zusammenschließen lassen.
- die in Ifferndarstellung umgetauscht werden können und umgekehrt.

- die man beliebig einfärben kann, um den Bezug zur Stellentafel deutlich zu machen.
- die sich nicht in die falsche Spalte der Stellentafel legen lassen.
- die man verändern kann, wobei gleichzeitig Änderungen z.B. im Additonsterm sichtbar werden.
- die zum Algorithmus der schriftlichen Addition sprechen.
- usw.

Da der Einsatz von LOGO-Systemen und Mikrowelten in der Grundschule überzeugende Vorteile hat, wird in diesem Forschungsprojekt ein LOGO-System genutzt. LOGO bietet eine große Flexibilität bei der Systemkonfiguration und kann so eingerichtet werden, dass selbst Kinder ohne Schreibkenntnisse und ohne Computervorkenntnisse in LOGO-Mikrowelten agieren können. Voraussetzung ist natürlich, dass man den richtigen didaktischen Ort für den Einsatz wählt, d.h. die Schüler müssen die Grundvorstellungen der angebotenen Mikrowelt bereits in realen Handlungen erfahren haben und können dann aufbauend auf dieser Grundlage in der Mikrowelt weiterarbeiten.

2.3 Metaphern in LOGO und mentale Modelle

2.3.1 Metaphern und neue Medien

Menschen benutzen Metaphern häufig und in ganz unterschiedlichen Situationen. Man kann sogar sagen, *'dass die Metapher unser Alltagsleben durchdringt, und zwar nicht nur unsere Sprache, sondern auch unser Denken und Handeln. Unser alltägliches Konzeptsystem, nach dem wir sowohl denken als auch handeln ist im Kern grundsätzlich metaphorisch'*[LAKOFF/JOHNSON 1998, 11]. Metaphern sind mehr als nur sprachliche Phänomene, man verwendet nicht nur ein Wort aus einem anderen Bereich um damit eine neue Sache zu bezeichnen, sondern sie gehen tiefer. Spitzer beschreibt Metaphern als *'Strukuren in unserem Langzeitgedächtnis, die uns beim Zurechtfinden in der Welt helfen. …Eine Metapher ist letztendlich ein Verhältnis zweier Strukturen. Wir sagen, dass eine Metapher gut passt, und meinen damit strukturelle Entsprechungen zwischen Sachverhalten.'*[SPITZER 2002, 454]. Die Sprache ist nur Transportmedium für diese Strukturähnlichkeit, sie stellt diese jedoch nicht her. Kinder lernen sehr früh Strukturen, die sich auf die körperliche Welt um uns (Physik) und unseren eigenen Körper (Physiologie) beziehen und verwenden diese dann zur

Strukturierung anderer, neuer Erfahrungen (vgl. [SPITZER 2002, 455]). Hier wird auch die Nähe zu Piagets Äquilibrationstheorie deutlich, die beschreibt, wie Schemata durch verschiedene Mechanismen (Assimilation und Akkomodation) verändert oder neu aufgebaut werden (vgl. [GINSBURG/OPPER 1998, 34f.]). Die Schemata Piagets sind aber eher Verhaltensmuster, die sprachliche Komponente fehlt, während Metaphern mehr wie übertragene Erklärungsmuster verstanden werden. Schemata sind eher Reaktionsmuster auf Klassen gleichstrukturierter Umweltgegebenheiten, während mit Metaphern versucht wird, strukturgleiche mentale Vorstellungen zu aktivieren um etwas verstehen zu können. Trotzdem sind Metaphern nicht statisch, sondern haben sowohl statische, wie auch dynamische Wissensanteile, beinhalten also Weltwissen und Handlungswissen. Neuere Theorien verwenden hier die Begriffe Frame und Skript. *'Die statischen Anteile bilden den sogenannten Frame (Rahmen), alles Veränderliche stellt das Skript (Szene) dar'*[RICKERT 2002, 18].

Jeder, der einen Computer benutzt, baut dabei Vorstellungen davon auf, wie die Maschine die ihr gegebenen Informationen verarbeitet. Ein solches Modell vom Computer (Maschine, Elektronengehirn, Programmoberfläche, Zeichenstift, Roboter, …) bietet dann einfache, vorstellbare bzw. nachvollziehbare Reaktionsmuster. Auch die, bei der Arbeit mit Computern genutzten, Redewendungen sind in der Regel metaphorisch:

- Mein Computer ist gerade ***abgestürzt***.
- Das Programm ***läuft*** oder hat ***sich aufgehängt***.
- Word für Windows stellt seine Dokumente in ***Fenstern*** dar.
- Ein Text wird ***gespeichert***, ***geladen*** oder auf Diskette ***geschrieben*** oder ***gesichert***.
- LOGO ist eine ***Interpreter***sprache
- usw.

Bei neuerer Software werden solche Denkgebäude und Vorstellungsmuster sogar angeboten, um die Komplexität des Systems überschaubar zu machen. (Bsp.: Ordner bei Windows (statt Verzeichnis- oder Baumstruktur), Icons für Programme und Werkzeuge, Schreibtisch (Desktop) mit Ablage und Papierkorb, usw.). Ein ausführliche Darstellung von *'Metaphern in der Computer-Fachsprache'* findet man bei RICKERT[2002]. Gleichzeitig mit diesen Metaphern wird auch vermittelt, wie man in einer solchen Umgebung sinnvoll arbeitet, es wird ein Weltbild dieser Mikrowelt aufgebaut.

SCHULMEISTER[1997, 52ff] zeigt, wie Metaphern in Multimedia benutzt werden um damit neue Medien, Darstellungsformen, Konzepte und Ideen zu beschreiben und so den Nutzern zugänglich zu machen. In diesem Kontext kann man auch zeigen, was Metaphern leisten können. Bei der Benutzung herkömmlicher, papierbasierter Medien fällt die Orientierung leicht, da etablierte und tradierte Standards existieren - z. B. in Büchern: lineare Seitenfolge, Inhaltsverzeichnis am Anfang, Kapitel- und Seitennumerierung, Verweise, Schlagwortverzeichnis usw. Hypermedia dagegen ist ein neues, virtuelles Medium, d. h. es existiert keine physische Repräsentierung, die eine bestimmte Nutzungs- und Organisationsform nahelegt. Für den Zugang zu Hypermedia-Systemen, das Interface, werden deshalb Metaphern verwendet, die den Zugang und das Verständnis erleichtern und eine bestimmte Sichtweise auf die Inhalte initiieren sollen: *'The interface metaphor is the theme by which the entire multimedia system is organized and represented. Using a familiar metaphor allows the user to bridge the gap between the unknown of program structure and content and the known of their own experience.'* [KOMMERS/GRABINGER/DUNLAP 1996, 199].

Typische Metaphern bei der Gestaltung (vgl. auch [SCHULMEISTER 1997, 52ff], [KRISTOF/SATRAN 1995, 40f]) sind:

- Buch, Lexikon, auch Bücherregal,
- Raum, z. B. Klassenraum, Lernkabinett, Bibliothek,
- Zeit, z. B. über Zeitleisten oder Biographien,
- Reise oder Abenteuer,
- Führung durch persönliche Guides,
- funktional, z. B. Darstellung eines Schreibtischs mit mehreren Gegenständen, wie Taschenrechner, Telefon oder Notizbuch, über die entsprechende Funktionen ausgelöst werden oder
- virtuelle Instrumente, z. B. Kompaß, Kilometerzähler, Mikroskop.

Es sollte auch berücksichtigt werden, dass jede Verwendung einer Metapher zu bestimmten Erwartungen und Beschränkungen führt. Zudem ist nicht jede Metapher für jeden Inhalt geeignet. So kann die Wahl einer ungeeigneten Metapher durchaus irreführend und kontraproduktiv sein.

In der Literatur wird auch häufig das Begriffspaar '*Analogie und Analogieschluß'* (vgl. z.B. [SEEL 2000, 192ff.]) gebraucht, um die Strukturgleichheit zwischen unterschiedlichen Wissens- und Erfahrungsbereichen und den daraus konstruierten mentalen Modellen zu beschreiben. Wir werden für dieses verbindende Strukturprinzip im Folgenden immer den Begriff Metapher verwenden.

2.3.2 Paradigmen und Metaphern in LOGO

Auch LOGO, als System, das den Computer, die Mathematik und das Lernen Kindern nahe bringen will, verwendet natürlich solche Metaphern (s.o.) und Paradigmen. Grundsätzlich soll hier aber noch einmal festgestellt werden, dass LOGO dem konstruktivistischen Paradigma folgt, was Schulmeister so umschreibt: *'Es geht dem Konstruktivismus nicht nur darum, dem Lernenden etwas mehr Verantwortlichkeit zuzuschieben, sondern den fundamentalen Wechsel von der Instruktion zum Lernen zu vollziehen. Der Lehrer ist nicht mehr der Steuermann und der Polizist des Unterrichts sondern Ressource und Facilitator für den Lernprozeß. Der Lernende ist seine eigene Kontrolle.'*[SCHULMEISTER 1997, 169].

Bei HOPPE [1984, 31] findet man eine übersichtliche Zusammenstellung zu informatischen Prinzipien und Metaphern des Programmierens in LOGO, die hier um weitere, in LOGO häufig gebrauchte Metaphern, erweitert wurden:

Prinzip	Metapher
Virtueller Zeichenroboter, - stift	Igel, der auf dem Monitor läuft
Anweisungen zur Direktausführung in der Befehlseingabe	… ' dem Igel etwas sagen ' .... … ' den Igel etwas fragen ' …
anthropomorphe Vorstellungen als Hilfe bei der Befehlseingabe	… ' selbst Igel spielen ' .....
Programmieren als Spracherweiterung	… ' dem Igel eine neues Wort beibringen '…
Modularisieren und Hierarchisieren	Baukasten ; Bausteine anfertigen
Verallgemeinern von Prozeduren durch lokale Variable ; Übergabeparameter	… ' flexible Bausteine ' … Maschinenmodell mit Eingabetrichtern, Variation und Kommunikation
Prozeduren (`lerne pr to ... ende`)	… ' Fähigkeiten des Igels '… … ' Fähigkeiten des Computers ' …
Funktionen	… 'kommunikative Prozeduren '…
Datenhaltung (`stiftunten? setze`)	… ' Wissen des Igels ' … … ' Wissen des Computers ' …

Tab. 2.05: Metaphern in LOGO

In der Tabelle wird auch deutlich, dass man, um das LOGO-System zu verstehen, nicht nur einzelne isolierte Metaphern, sondern z. T. ganze Metaphernhierarchien bzw. Metaphernnetze braucht:

- Es gibt den Igel, der auf dem Monitor läuft, (Lebewesenmetapher)
- … der sich bestimmte Dinge merkt, (Gedächtnis)
- … der einen Stift hat, mit dem er zeichnet, (Werkzeug)
- … dem man Befehle geben kann, (Sprache)

- … … manche Befehle haben Ein- und Ausgabetrichter (Maschinen)
- … … manchen Befehlen kann man Zettel mit Information geben (Agenten)
- … ... ... usw.

Da für das Projekt aber nur der Bereich Igelgrafik genutzt wird, werden im Folgenden auch nur auf Metaphern aus diesem Bereich referiert. Viele der Metaphern und Grundvorstellungen wurden auch schon oben in 2.1.1 genannt und werden hier nicht noch einmal dargestellt.

Alles, was man im Bereich der Igelgeometrie macht, beruht auf der Steuerung eines 'kybernetischen Tierchens' (Igel), das auf dem Computermonitor 'lebt'. Der Igel wird durch ein Dreieck im Igel-Fenster oder real durch ein Modell mit Elektromotoren, das am Boden fährt, dargestellt. Dieser Igel ist, wie Papert schreibt, *'ein Gegenstand mit dem man denkt'* [PAPERT 1985, 19] und mit dem man in der Igelsprache LOGO kommunizieren kann. Der Zustand des 'Igels' ist durch seine Sichtbarkeit, d.h. das Igelsymbol ist sichtbar oder nicht, seine Position, die Blickrichtung und durch den Zustand, d.h. die Farbe, Breite und Art seines Zeichenstiftes, bestimmt. Die Grundbefehle zur Steuerung dieses 'Zeichenroboters' sind vorwärts, rückwärts, links und rechts. Damit kann der Igel koordinatenunabhängig gesteuert werden. Der Verzicht auf ein äußeres, absolutes Bezugssystem erleichtert den Kindern das Denken mit dem bzw. für den Igel. Der Igel bewegt sich so, wie man sich selbst bewegen könnte - man hat ein *'anthropomorphes'* (vgl. [PAPERT 1985, 67]) Modell, was bedeutet, dass die Igelbewegungen in Einklang mit den eigenen motorischen Grunderfahrungen und Grundmustern stehen, die über Metaphern aktiviert werden. Dies führt dann zu der Metapher 'Igel spielen', um die Igelbefehle zu verstehen und die Bewegungen des Igels planen zu können.

Das Egozentrische der Igelmetapher hat natürlich zur Folge, dass die Geometrie des Igels keine äußere, kartesische sein kann, sondern eine innere, eine Differentialgeometrie sein muss. Eine Kreislinie ist für den LOGO-Igel, der ich-bezogen agiert und eigentlich keinen Überblick über die Gesamtkonstellation hat, sondern einfach 'der Nase nach' denkt und sich bewegt, keine Linie mit gleichem Abstand zu einem Punkt, sondern eine Linie mit konstanter Krümmung. Der Igel bewegt sich immer ein bisschen vorwärts und dreht sich ein bisschen, alles in winzigen Teilschritten. Der Nutzer denkt bei der Konstruktion wie der Igel, kann aber den fertigen Kreis aus der Perspektive des äußeren Betrachters kontrollieren. Dieser einfache Perspektivwechsel macht sicher auch die Schlagkraft der Igelmetapher aus. Man kann sich in eine

Konstruktion direkt hineindenken und sie dann im nächsten Moment aus der Distanz betrachten.

Im CEKA Projekt geht es um Zahlvorstellung, deshalb soll diese im Folgenden noch einmal kurz aus LOGO-Sicht beschrieben werden. Zahlvorstellung (vgl. Kapitel 1.1.4) in LOGO ist im Gegensatz zu der bei LORENZ [1993c, 120f.] dargestellten keine statische, bei der die Gesamtkonstellation verstanden sein muss, sondern eine dynamische. Der Zahlenstrahl wird durch den Logoigel beim Vorwärtsgehen erzeugt, bzw. der LOGOigel geht an einem gedachten Zahlenstrahl Schritt für Schritt vorwärts. Beide Verhaltensweisen des Igels basieren auf eigenkörperlichen Erfahrungen, die bereits jedes Kind kennt. Auch dem Problem der verschiedenen Zahlaspekte für die Zahlen:

- Markierungen auf dem Zahlenstrahl (Punkte) oder
- Strecken zwischen den Markierungen, (Längen, Vektoren)

die bei spielerischen Handlungen am Zahlenstrahl auftreten, wird hier die Schärfe genommen. Die Schritte, die der Igel (das Kind) macht, sind die Lücken, stehen also für den kardinalen Zahlaspekt (Menge der gleichen Strecken) oder Maßzahlaspekt (Längenstücke). Die Stellen, oder Punkte, an denen der Fuß aufgesetzt wird und bei denen dann weitergezählt wird, haben eher ordinalen Charakter (Zählpunkte, Meilensteine). Der erste Schritt geht bis zur Zahl 1, der zweite zu 2, usw…, die Null bezeichnet den Ort vor dem 1. Schritt, den Ausgangspunkt der Bewegung. Wenn man von Null aus einen Schritt rückwärts macht, dann ist man bei -1, es gibt also kein nulltes Längenstück oder keinen nullten Schritt. Hier wäre eine Schnittstelle zur Einführung der negativen Zahlen. Damit ist gleichzeitig die Minimalvorstellung und Strategie für die Igelbewegung am gedachten Zahlenstrahl beschrieben. Das Vorwärtsgehen des Igels ist allerdings mehr als reines Vorwärtszählen, da die Idee der Proportionalität (Schrittzahl mit gleicher Schrittlänge - zurückgelegter Weg) natürlich eine Rolle spielt und von den Kindern auch verstanden sein muss. Eigentlich verschmelzen hier, bei der Anwendung auf die Igelbewegung auf ganz natürliche Weise die drei Zahlaspekte, der kardinale, der ordinale und der Maßzahlaspekt. Der Igel geht eine Menge von Schritten, die man zählen kann, vorwärts und legt dabei eine bestimmte Strecke zurück. Genauer wird dies im folgenden Kapitel analysiert.

2.4 Modelle, Metaphern und Mathematiklernen

2.4.1 Aufbau mentaler Modelle durch Instruktion

Mentale Modelle (vgl. 1.1.6) oder individuelle Denkmodelle sollen vom Lernenden aufgebaut werden, damit er dann damit oder 'darauf' arbeiten kann. Dies versucht man dadurch zu initieren, dass man eine reduzierte modellhafte Präsentation des Inhaltes, ein Abbild, anbietet, um danach mittels Instruktion, aufbauend auf das Vorwissen des Lernenden, dieses Modell in einem Lernprozess in verschiedenen kontrollierten Schritten aufzubauen (vgl. [GAGNÉ/BRIGGS/WAGNER 1979];[MERILL u.a. 1992]). Dahinter steht die tradierte Vorstellung von Unterricht: *'Modelle der Unterrichtsplanung gehen in der Regel von der Vorstellung aus, daß es basale Wissensbausteine zu vermitteln gilt, die sich allmählich zu einem komplexeren Gebäude zusammenfügen.'*[SCHULMEISTER 1997,164]. Diese Vorstellungen des Wissensaufbaus sind nach neueren Theorien, nicht mehr haltbar, wie Resnik feststellt: *'Cognitive theory today offers strong reasons to consider such bottom-up instruction suspect. First we know that human memory for isolated facts is very limited. Knowledge is retained only when emboddied in some organizing structure...'*[RESNIK 1989, 3]. Instruktionstheorien, aufbauend auf das Paradigma der Wissensakkumulation, wurden dann weiterentwickelt zu den sogenannten Expertensystemen, die sich aber aus verschiedenen Gründen nicht durchsetzen konnten. Der Ansatz, dass im Kopf ein mentales Modell in verschiedenen kleinen Schritten, unterstützt durch didaktische Kniffe, vom Experten im Computer erzeugt werden kann, ist eigentlich undidaktisch. Dieser Aussage würden sicher auch die meisten Lehrer zustimmen, ohne sich im klaren darüber zu sein, dass man ja 'vom Experten im Computer' einfach durch 'vom Lehrer' ersetzen könnte, um eine Beschreibung des Unterrichts in der Schule zu erhalten. Genau dies wird auch von Papert mit seinem Mikroweltenansatz und anderen Konstruktivisten kritisert, die alle darauf hinweisen, dass Lernen mehr ist, als das Lernen von Inhalten und Fertigkeiten. *'Man kann Fertigkeiten und Fakten leicht in kontrollierbaren Dosierungen ausgeben. Man kann sie auch leichter messen. Und es ist sicher leichter, den Erwerb einer Fertigkeit zu erzwingen, als zu überprüfen, ob jemand eine Idee kennengelernt hat. Es überrascht daher nicht, dass die Schule das Lernen von Fakten und Fertigkeiten betont und daß die Schüler eine Vorstellung vom Lernen bekommen, die nur „lernen daß" und „lernen wie" beinhaltet.'*[PAPERT 1984, 142]. Wie passend diese Aussage auch heute noch ist, merkt man, wenn man die aktuelle Diskussion um Bildungsstandards verfolgt, die sich hauptsächlich mit den nicht mehr vorhandenen Inhalten beschäftigt und nicht mit den Ideen, die vermittelt werden sollen und den Lernwelten, die man dafür entwickeln müsste. Die Diskussion zwischen den Instruktionalisten und den Konstruktivisten, die im Bereich 'Lehren und Lernen mit Multimedia' inzwischen zugunsten der Konstruktivisten entschieden ist [vgl. SCHULMEISTER 1997, 124 und 162ff.], hat in der Schule noch nicht einmal begonnen. *'Es handelt sich um einen grundlegenden Paradigmenwechsel, dem wir im Streit der Instruktionalisten mit den Konstruktivisten begegnen. Selbst wenn man sich nicht programmatisch dem Konstruktivismus verschreiben wollte, kann man feststellen, daß das lange Jahrzehnte vorherrschende Paradigma der Instruktion allmählich abgelöst wird durch das Paradigma offener Lernsituationen, daß die lernzielorientierte Planung von Unterricht ersetzt wird durch das Arrangement von Lernumgebungen.'*[SCHULMEISTER 1979, 165]. Selbst Piaget, der ja durch seine Arbeiten den instruktionalistischen Mathematikunterricht der letzten 30 Jahre mit initiiert hat, vertritt inzwischen eher konstruktivistische Ideen, wenn er schreibt: *'Das Kind ist kein passives Wesen, dessen Hirn es vollzustopfen gilt, sondern ein aktives Wesen, das in seiner spontanen Suche nach Wissen gefördert sein will.'*[PIAGET 1999, 182].

2.4.2 Metapherntheorie nach Lakoff/Nunez[2000]

Conceptual metaphors

Wie sieht nun aber dieser 'didaktischere' Ansatz des Konstruktivismus für das Lernen aus? Schulmeister schreibt dazu: *'Das Basale im Konstruktivismus ist die aktive Auseinandersetzung der organisierenden Wissensstruktur des Lerners mit den ganzheitlichen Konzepten der Praxis, das Basale sind nicht die isolierten Bausteine und die didaktischen Abstraktionen.'*[SCHULMEISTER 1997, 164]. Wie bringt der Konstruktivismus diese Wissenstruktur in den Kopf? Die einfache Antwort lautet, die Ideen als Stukturen sind schon da, sie müssen nur aktiviert werden und zwar durch Metaphern, die Bezug nehmen auf diese vorhandenen Strukturen, *'... it must reveal how mathematics is grounded in embodied experience and how conceptual metaphors structure mathematical ideas.'*[LAKOFF/NUNEZ 2000, 6]. 'Conceptional metaphor', was man mit Begriffsmetapher oder konzeptschaffende Metapher übersetzen könnte, wird erklärt als: *'It is a grounded, inference-preserving cross-domain mapping - a neural mechanism that allows us to use the inferental stucture of one conceptual domain (say geometrie) to reason about another (say arithmetic). Such conceptual metaphors allow us to apply what we know about one branch of mathematics in order to reason about another branch.'*[LAKOFF/NUNEZ 2000, 6]. Genau diese Strukturgleichheit ermöglicht dann das selbständige Lernen in Mikrowelten. Man hat mit den Metaphern bekannte Werkzeuge die einem helfen, in einem neuen Gebiet neues Wissen und neue Fähigkeiten selbständig zu lernen.

Mathematische Ideen werden meist mit Hilfe mathematischer Symbolik beschrieben, weshalb viele Menschen keinen Zugang zu ihnen haben, obwohl sie über Konzepte und Strukturen aus anderen Erfahrungsbereichen verfügen, die helfen könnten, mathematische Ideen zu verstehen. *'Because metaphors are based on common experiences, the mathematical ideas that use them can be understood for the most part in everyday terms.'*[LAKOFF/NUNEZ 2000, 7]. Im Folgenden werden die Ideen von Lakoff/Nunez, die zeigen, wie tragfähig Metaphern für das Mathmatiklernen sein können, ausführlicher dargestellt.

Metaphern und grundlegende mathematische Ideen

Im alltäglichen Leben gibt es eine Reihe von Konzepten, die auch grundlegend für Mathematik sind. Allerdings sind die angeborenen Fähigkeiten zum spontanen Anzahlerkennen (vgl. Subitizing 1.5) und Schätzen nicht ausreichend für das einfache Zählen (vgl. 1.6) und schon gar nicht um die Zählfertigkeiten zu verallgemeinern. Hierzu müssen verschiedene weitere Metaphern aktiviert werden, wobei Lakoff/Nunez zwischen *grounding metaphors* und *linking metaphors* unterscheiden:

> *'1. Grounding metaphors yield basic, directly grounded ideas. Examples: addition as adding objects to a collection, subtraction as taking objects away from a collection, sets as containers, members of a set as objects in a container. These usually require little instruction.*
>
> *2. Linking metaphors yield sophisticated ideas, sometimes called abstracting ideas. Examples: numbers as points on a line, geometrical figures as algebraic equations, operations on classes as algebraic operations. These require a significant amount of instruction.'*[LAKOFF/NUNEZ 2000, 53].

Elementare arithmetische Fähigkeiten basieren auf dem Zusammenhang zwischen den angeborenen Fähigkeiten (*'innate arithmetik'* [Lakoff/Nunez 2000, 51], wie Schätzen und Subitizing (vgl. 1.3.2) sowie auf Alltagsaktivitäten wie z.B. irgendwelche Dinge zu gruppieren oder zu stapeln, Dinge wegzunehmen oder dazuzulegen, in Schritten vorwärts oder rückwärts zu gehen usw... Die im Folgenden dargestellten Metaphern haben natürlich eine große Nähe zu den Zahlaspekten (vgl. 1.1.2 und 1.2.1). Im Gegensatz zu den Zahlaspekten, die mathematisch begründet und abgeleitet sind, haben die Metaphern ihre Grundlage jedoch im alltäglichen Erfahrungswissen der Kinder (interne Strukturen) und erst die Übertragung dieser Strukturen in den Bereich der

Mathematik bringt diese zur Deckung mit den externen mathematischen Strukturen, welche durch die Zahlaspekte beschrieben werden. Dadurch können dann diese externen Strukuren internalisiert werden. Die Mathematik ist nicht mehr etwas Fremdes und Abstraktes, sondern wird etwas Persönliches und Natürliches.

Es werden nun vier Gruppen von grundlegenden arithmetischen Metaphern vorgestellt [vgl. LAKOFF/NUNEZ 2000, 54-74]:

- Arithmetik als Objektsammlung (*Object Collection metaphor*)
- Arithmetik als Objektkonstruktion (*Object Construction metaphor*)
- Die Meterstabmetapher (*Measuring Stick metaphor*)
- Arithmetik als Bewegung entlang eines Weges (*Motion metaphor*).

Für das CEKA Projekt sind vor allem die Meterstabmetapher und die Bewegungsmetapher wichtig. Deshalb werden beide nun noch genauer dargestellt.

Meterstabmetapher

Die Meterstabmetapher greift auf Erfahrungen zurück, die jeder beim Messen mit Meterstäben, Seilen, Körperteilen (Finger, Armlänge, Spanne, Schritt...) oder anderen dünnen, länglichen Objekten (Bleistifte, Zahnstocher, Strohhalme, Holzstäbe, ...) schon einmal gemacht hat (vgl. 1.2.4). Dabei sind diese realen Objekte, die gleichzeitig die Maßeinheit repräsentieren, Konkretisierungen der abstrakten geometrischen Idee Strecke (*line segment*). LAKOFF/NUNEZ sprechen deshalb von *'physical segments'*[2002, 68]. Die Basisobjekte (Maßeinheiten) können dann aneindergelegt werden und man erhält wieder ein neues Objekt (physical segment, hier als Längenobjekt bezeichnet), z.B. die Tischkante, die 12 Bleistifte lang ist. Die Tätigkeiten beim Messen und die Übertragung in den Bereich Arithmetik sind in der folgenden Tabelle dargestellt.

Arithmetik ist Umgang mit Längenobjekten
(nach [LAKOFF/NUNEZ 2000, 68] übersetzt vom Autor)

Ausgangsumgebung Gebrauch des Meterstabes (Messen)		*Zielumgebung* Arithmetik
Längenobjekte (i.d.R. bestehend aus einer endlichen Zahl von Einheitslängen)	-->	Zahlen
Das Basis-Längenobjekt	-->	die Zahl 1
Die Länge eines Längenobjektes	-->	Die Größe der Zahl
Länger	-->	Größer
Kürzer	-->	Kleiner

Handlungen mit Längenobjekten	-->	Arithmetische Operationen
Das Ergebnis dieser Handlungen, das neue Längenobjekt	-->	Das Ergebnis arithmetischer Operationen
Längenobjekte an den Enden aneinanderlegen, um dadurch längere Längenobjekte zu erzeugen	-->	Addition
Kürzere Längenobjekte von längeren abtrennen um andere Längenobjekte zu erzeugen	-->	Subtraktion

Tab. 2.06: Längenobjekte-Metaphern

Über die Wiederholungsmetapher oder auch über die Metapher des Anlegens bzw. Abschneidens von n gleichen Teilen kommt man dann auch zur Multiplikation als Vervielfachen und Division als Aufteilen. Außerdem kann man durch Übergang zu kleineren Einheiten natürlich auch Bruchzahlen erzeugen.

Damit die Abbildung auf die Arithmetik vollständig ist, fehlt noch die Metapher für die Null:

Das Fehlen eines Längenobjektes	-->	Null

Die Tragfähigkeit z.B. der Metapher 'Längenobjekt-ist-Zahl', zeigt sich daran, dass man damit jede beliebige Zahl erzeugen kann, selbst Zahlen deren Längenrepräsentierung inkommensurabel ist, also solche die nicht aus einer Maßeinheit aufgebaut werden können. Man stelle sich ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck vor, dessen Katheten die Länge 1 haben. Die Hypothenuse als Längenobjekt repräsentiert folglich die irrationale Zahl Wurzel 2. Die Inkommensurabilität stellt sich als der 'unendliche' Vorgang des Übergangs zu immer kleineren Einheiten dar.

Bewegungsmetapher

Die Bewegung, oder das Vorwärtsgehen entlang einer gedachten Linie führt zur nächsten Gruppe von Metaphern.

<u>Arithmetik ist Bewegung entlang eines Pfades</u>
(nach [Lakoff/Nunez 2000, 72], übersetzt vom Autor)

Ausgangsumgebung Bewegung entlang eines Pfades		*Zielumgebung* Arithmetik
Bewegungshandlungen auf dem Pfad	-->	Arithmetische Operationen
Ein Punkt auf dem Pfad, den man erreicht hat	-->	Das Ergebnis arithmetischer Operationen
Der Ursprung des Pfades, Start	-->	Die Zahl Null
Punkte/Orte auf einem Pfad	-->	Zahlen
Der Ort der Einheit, Punkt mit einem Unterschied vom Ursprung	-->	die Zahl 1
Weiter vom Ursprung weg als	-->	Größer als

Näher am Ursprung als	-->	Kleiner als
Sich von einem Punkt A vom Ursprung um eine solche Strecke entfernen, wie der Punkt B vom Ursprung entfernt ist	-->	Addition von B zu A (A plus B)
Sich von einem Punkt A zum Ursprung um eine solche Strecke hinbewegen, wie B vom Ursprung entfernt ist.	-->	A minus B

Tab. 2.07: Bewegungsmetaphern

Wenn man geradeaus von einem Ort zu einem anderen geht, dann ist der zurückgelegte Weg ein Längenobjekt. Der Startpunkt der Bewegung ist das eine Ende des Längenobjektes und der Endpunkt der Bewegung das andere. Die einzelnen Schritte der Bewegung markieren dann die Punkte auf diesem Längenobjekt. Im Gegensatz zu Längenobjekten ist der Bewegungspfad aber gerichtet, also eher ein Vektor als eine Strecke. Zahlen sind dann Punkte im eindimensionalen affinen Raum. Über die Wiederholungsmetapher können auch hier wieder Multiplikation oder Division erklärt werden. Die Bewegungsmetapher, durch die man Zahlen als Punkte erhält, ist außerdem gut geeignet, um ganz natürlich zu den negativen Zahlen vorzudringen.

Bedeutung für die Erklärung der Igelbewegung

Die Bewegungsmetapher ist grundlegender als die Meterstabmetapher. Dies zeigt sich daran, dass die Körperbewegungen entlang des Bewegungspfades direkt als arithmetische Operationen erklärt werden können. Es müssen nicht irgendwelche Handlungen mit Objekten gemacht werden, die dann als Operationen umgedeutet werden. Außerdem ist die Bewegungsmetapher ganz natürlich mit dem Zählen verknüpft:

> Eine Einheit vom augenblicklichen Punkt entfernt ist die nächste Zählzahl, beim Zählen in 2-er Schritten ist die Einheit (Schrittlänge) eben zwei Einereinheiten und die Zielumgebung sind dann die geraden Zahlen.

Für die Igelbewegung spielen aber, wie schon in 2.2.2 ausgeführt wurde, beide Metaphern eine Rolle. Die Bewegungsmetapher veranschaulicht die Bewegung des Igels, vorwärts und rückwärts, während die Meterstabmetapher eher die Proportionalität und die operationalen Zusammenhänge ausdrückt: vier Schritte sind zwei mal zwei Schritte, egal welche Skalierung momentan gerade im LOGO-System verwendet wird.

Im Gegensatz zu allen anderen Metaphern muss bei der Bewegungsmetapher keine Metapher für die Null konstruiert werden. Null ist der Ausgangspunkt der Bewegung. Für den LOGO-Igel liegt der Ausgangspunkt in der Mitte der Monitorfläche, wie der Nullpunkt bei einem Achsenkreuz. Damit sind per se schon die negativen Zahlen eingerichtet. Ob der Igel jetzt von der Mitte aus auf einer gedachten x-Achse, mit `Kurs 90` (`kurs 0` ist Richtung oberer Monitorrand, `kurs 90` ist Richtung rechter Monitorrand) 100 Schritte rückwärts geht oder, nach einer 180°-Drehung (Richtung linker Monitorrand) dann mit `Kurs 270`, 100 Schritte vorwärts geht, er kommt immer in den Bereich negativer Zahlen, was er auch sofort anzeigt, wenn man dann die Funktion `Ort` aufruft. Dasselbe gilt natürlich auch für die Bewegung in y-Richtung. Dieser Übergang mit der 180°-Drehung um Null könnte dann wieder Grundlage für eine Metapher sein, welche die Multipliaktion mit negativen Zahlen erklärt: die 180°-Drehung ist die Multiplikation mit -1 (vgl [LAKOFF/NUNEZ 89f.]). Nun könnte man sich noch weiter überlegen, welche Entsprechung die Metapher der 90°-Drehung hat usw.

Bedeutung für die Anordung der Zahlen am unsichtbaren Zahlenstrahl

Dafür, dass Zahlen als Punkte auf einem Pfad, den man entlang gehen kann und nicht als Anzahlen verstanden werden, gibt es in unserer Umgangssprache viele Belege (siehe [LAKOFF/NUNEZ 2000, 74]):

- Wie *nahe* sind die Zahlen beeinander?
- 37 ist *weit weg* von 189, 712...
- 6 kommt *vor* 7
- 49 ist/liegt *neben* 50 , ... ist *fast* 50, ... kommt *kurz vor* 50
- Zähle bis 20 ohne Zahlen zu *überspringen*
- Zähle bis 10 in *Zweierschritten*
- Zähle ab 20 *rückwärts*
- Wir müssen noch einmal *bei Null* angefangen.
- (hier gibt es aber auch die 'Objekt Collection' Variante:
  Wir haben *mit Null* angefangen.)
- ...

Diese Redewendungen weisen alle darauf hin, dass jeder, der über Zahlen redet, eher eine Bewegungsvorstellung, als eine Mengenvorstellung hat. Man operiert mit Zahlen, indem man sich auf einem mentalen Zahlenstrahl bewegt und nicht dadurch, dass man in Gedanken irgendwelche Mengen manipuliert. Die in LOGO durch den LOGO-Igel repräsentierte Bewegungsmetapher ermöglicht es, auf ganz natürliche Weise mit Zahlen zu experimentieren und über Zahlen nachzudenken, indem man mit dem LOGO-Igel experimentiert und über die Igelbewegung nachdenkt wie über die eigene Körperbewegung.

Abschließend soll aber betont werden, dass natürlich alle 4 Metaphern (Bewegungsmetapher, Meterstabmetapher, Objektsammlung und Objektkonstruktion) wichtig sind. Um ein möglichst vollständiges Bild der grundlegenden Arithmetik zu bekommen, müssen alle 4 Strukturen genutzt und ausgebildet werden. Lakoff/Nunez sprechen deshalb auch von den '4Gs': *'The significance of the 4Gs is that they allow human beeings, who have an innate capacity to form metaphors, to extend arithmetic beyond the small amount that we are born with, while preserving the basic properties of innate arithmetik'*[LAKOFF/NUNEZ 2000, 77].

2.5 LOGO als Forschungsumgebung und -werkzeug

Falls man selbst eine Umgebung oder Mikrowelt für Schüler einrichten möchte, sollte man verstehen, wie das LOGO-System aufgebaut ist und welche Möglichkeiten man hat, um in das bestehende System einzugreifen. Andererseits kann im Rahmen dieser Arbeit aber kein Kurs zur Beherschung des gesamten LOGO-Systems durchgeführt werden. Für eine Einführung in LOGO gibt es sehr viele Hinweise in der Literatur und im WWW (siehe Anhang). Deshalb sollen hier einige kurze Hinweise genügen, welche die Grundfunktionalität beschreiben und die wichtigsten Ideen zum Einsatz des LOGO-Systems vermitteln.

2.5.1 Das Grundsystem MSWLogo

Das Grundsystem MSWLogo (s.u. Abb. 2.01) besteht aus dem Hauptfenster, in dem der Igel 'lebt' (MSWLogo Igelfenster für die Grafikausgabe), dem Fenster der Befehlseingabe (Befehle an den Igel geben, Steuern des Gesamtsystems, Rückmeldungen des Igels oder des Systems) und dem Editorfenster, das man bei Bedarf öffnet (Texteditor um bequem neue Programme zu schreiben). Alle Fenster sind freischwebend, so dass man die Bedienoberfläche beliebig einrichten kann. Das Befehlseingabefenster lässt sich bei Bedarf minimieren, so dass man dann nur noch das Grafikfenster, in dem der Igel lebt, sieht.

Befehle an den LOGO-Igel gibt man in Textform unten im Befehlseingabefenster in der Eingabezeile ein. Reaktionen des Systems auf die Befehle sieht man dann im Igelfenster (Grafikausgabe) oder im Textbereich des Befehlseingabefensters (Textausgabe).

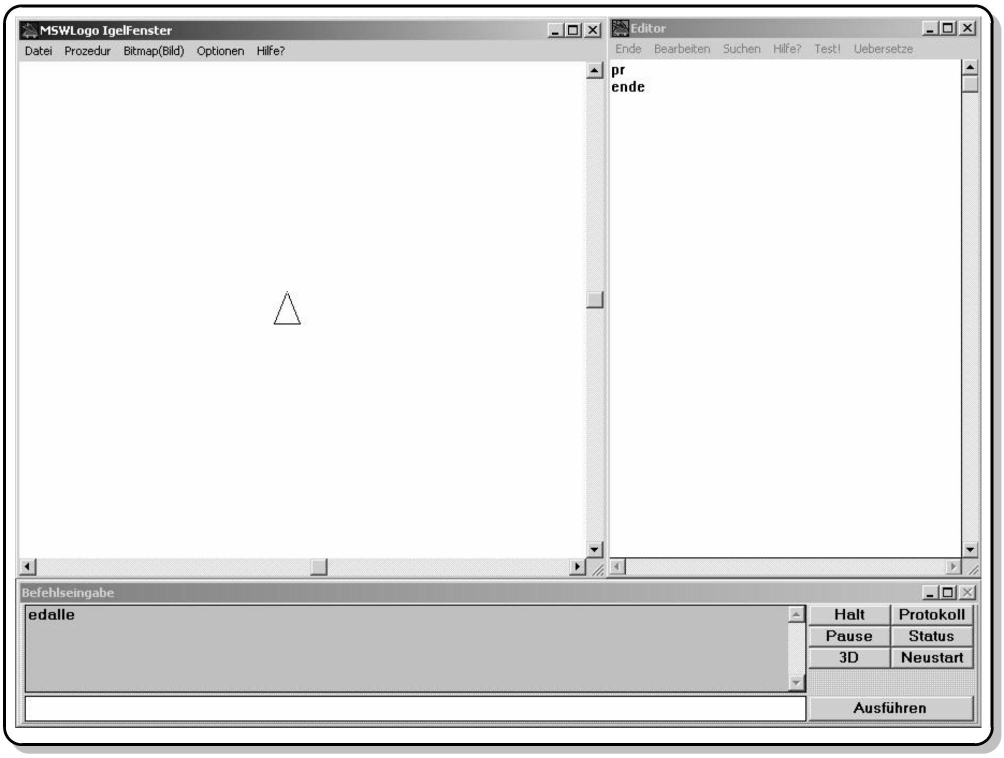


Abb. 2.01: LOGO-System (Igelfenster, Editor und Befehlseingabe)

Die 'Zentrale' eines jeden LOGO-Systems ist der LOGO-Interpreter. Das Gesamtsystem mit seinen Komponenten und seiner Funktionalität kann man sich dann wie folgt vorstellen:

- In der linken Spalte der Grafik (Abb. 2.02) ist die Fensterstruktur die der Nutzer sieht (vgl. Abb. 2.01) dargestellt.
- Rechts sieht man die verschiedenen Befehlsumgebungen, auf die der LOGO-Interpreter zugreift, um die Texteingaben zu interpretieren.

Der LOGO-Interpreter steuert den Ablauf im Gesamtsystem. Hierzu stehen ca. 300 eingebaute Grundbefehle zur Verfügung. Dieser Befehlsumfang kann vom Nutzer durch neue Befehle ständig erweitert und angepasst werden. Neue Befehle stehen aber nur solange das System läuft zur Verfügung und müssen gespeichert werden, falls man die Umgebung später wieder nutzen möchte. Befehle, die man häufiger braucht und die nicht in das Grundsystem eingebaut sind, kann man im Befehleverzeichnis */LOGOLIB/* in Dateien speichern. Sie werden dann beim Aufruf automatisch von dort geladen, so dass kaum ein Unterschied zur Ausführung der Grundbefehle festzustellen ist. Dadurch kann man das Grundsystem fast beliebig ausbauen und die Nutzer bemerken keine Unterschiede zu den eingebauten Grundbefehlen.

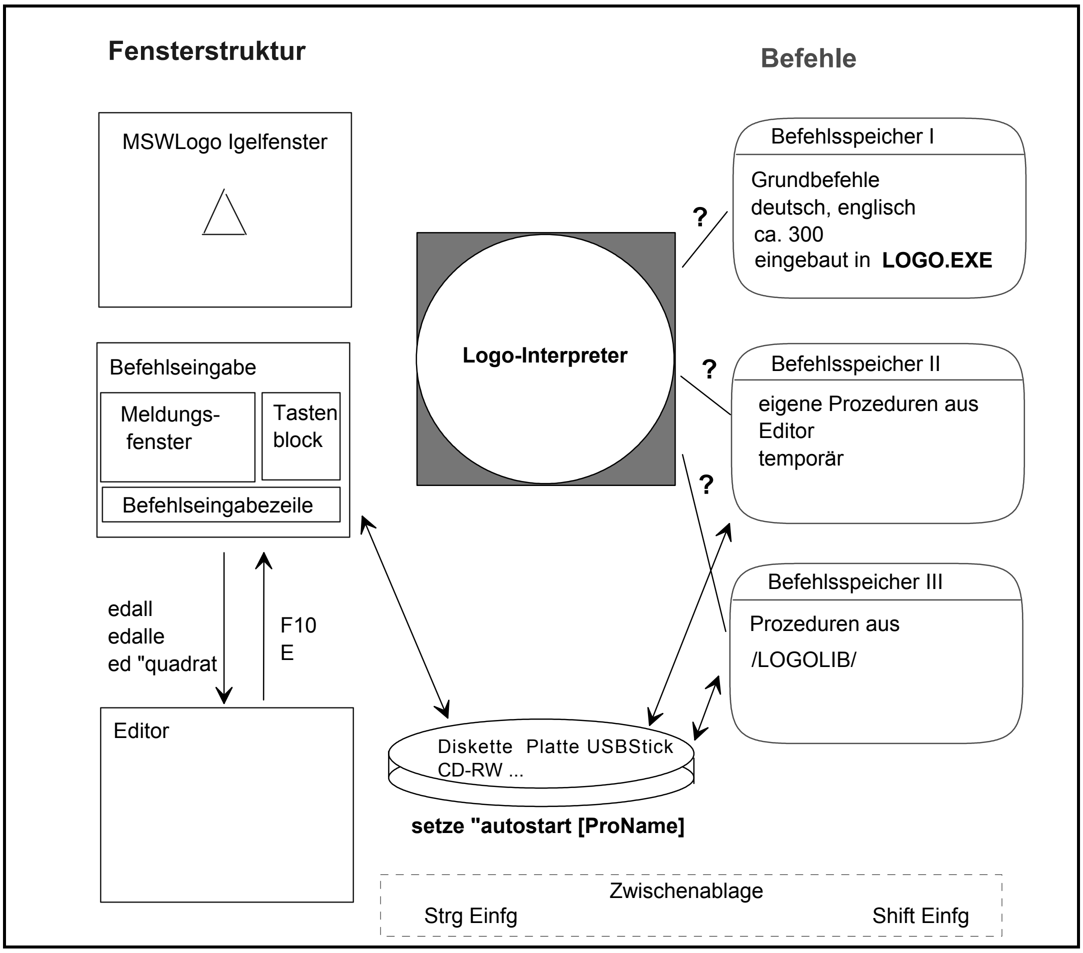


Abb. 2.02: LOGO-System mit Bedienoberfläche schematisch

Man nutzt die Möglichkeiten des Befehleverzeichnisses */LOGOLIB* auch, um neue Grundbefehle von den Nutzern testen zu lassen, bevor man die Befehle fest in den Interpreter einbaut. Da die Computer sowieso immer schneller werden, sollte man das Grundsystem mit nur wenigen fest eingebauten Befehlen ausstatten und alle weiteren Befehle dann z.B. im Befehleverzeichnis vorhalten. Damit erreicht man, dass möglichst viele Befehle dem Nutzer voll zugänglich sind, d.h. angepasst werden können.

2.5.2 Konfigurieren des Systems

Der Lehrende, der das LOGO-System im Unterricht einsetzen möchte, hat verschiedene Möglichkeiten um das System an die verschiedenen Unterrichtssituationen und an die Möglichkeiten der Nutzer, also der Schüler, anzupassen. So kann z.B. beim Start des LOGO-Systems direkt eine Datei ausgeführt werden. Diesen Mechanismus nutzt man, um sofort nach dem Start eine bestimmte vorkonfigurierte Mikrowelt bereitzustellen, d.h. der naive Nutzer startet LOGO und ist sofort in seiner Mikrowelt.

Somit ergeben sich verschiedene Möglichkeiten, um z.B. eine Mikrowelt 'Zahlenstrahl' einzurichten:

1. Konfigurationsmöglichkeit für die Mikrowelt `Zahlenstrahl`

   Die Umgebung wird auf Diskette / Festplatte in einer Datei gespeichert. Die Datei wird vom Nutzer geladen, danach stehen die Prozeduren aus der Datei zur Verfügung: `Zahlenstrahl, vwz, rwz, ...` können benutzt werden.

   Nachteil: alle Prozeduren sind sichtbar und können verändert werden.

2. Konfigurationsmöglichkeit für die Mikrowelt `Zahlenstrahl`

   Wie 1., aber die Prozeduren werden versteckt, so dass sie im Editor nicht zu sehen sind, der Schüler sieht nur, was er sehen soll:
   ```
   bury [strich Zahlenstrahl vwz rwz]
   ```
   als letzte Zeile in der Datei, bevor sie abgespeichert wird.

   Nachteil: `Zahlenstrahl` muss aufgerufen werden.

3. Konfigurationsmöglichkeit für die Mikrowelt `Zahlenstrahl`

   Wie 1. bzw. 2., aber die Prozedur `Zahlenstrahl` wird automatisch beim Laden gestartet, so dass der Zahlenstrahl einfach da ist:
   ```
   setze "autostart [ zahlenstrahl ]
   ```
   als letzte Zeile in der Datei

   Nachteil: Die Datei muss vom Nutzer geladen werden.

4. Konfigurationsmöglichkeit für die Mikrowelt `Zahlenstrahl`

   Die Umgebung Zahlenstrahl wird als Datei *ZAHLENST* im Verzeichnis */LOGOLIB/* gespeichert. Beim Aufruf von `Zahlenstrahl` wird sofort der Zahlenstrahl gezeichnet. Befehle, die nicht zu sehen sein sollen können versteckt werden. Dann entsteht beim Nutzer der Eindruck, es handle sich um einen Grundbefehl.

5. Konfigurationsmöglichkeit für die Mikrowelt `Zahlenstrahl`

   Die Umgebung Zahlenstrahl ist als Datei *ZAHLENST* im Verzeichnis */LOGOLIB/* gespeichert. Beim Doppelklick auf des LOGO-Icon wird der Pfad zu *ZAHLENST* als Kommandozeilenparameter an LOGO übergeben, LOGO wird gestartet und lädt dann gleich *ZAHLENST*, der Zahlenstrahl wird sofort gezeichnet. Dies ist die eleganteste Methode um eine Mikrowelt bereitzustellen. Für eine Sammlung von Mikrowelten verwendet man einfach mehrere Icons.

2.5.3 Kommunikation mit dem System

Um in der Mikrowelt zu arbeiten und um den Igel darin zu bewegen, muss man Befehle geben. Auch hier gibt es wieder verschiedene Möglichkeiten, diese Kommunikation mit dem System durchzuführen.

1. Möglichkeit: Kommunikation über das Befehlseingabefenster.

   Das ist die Standardeingabe. Man schreibt in der Befehlseingabezeile Befehle oder Ketten von Befehlen und diese werden dann vom Interpreter direkt ausgeführt. Rückmeldungen bekommt man im Ausgabefenster oder im Igelfenster.

2. Möglichkeit: Kommunikation über die Tastatur.

   Dazu werden auf bestimmte Tasten der Tastatur Funktionen und Prozeduren gelegt, die dann beim Drücken der Tasten aufgerufen werden. Ein Beispiel dafür ist 'Tastenlogo' (siehe Sofortprogramm in [ABELSON 1985, 99]) für Kindergartenkinder.

3. Möglichkeit: Kommunikation über die Maus

   Wie die Tasten der Tastatur können auch die Maustasten mit Befehlen belegt werden. Die Igelbewegung wird damit direkt an den Mauszeiger gehängt.

4. Möglichkeit: Windows Steuerungselemente verwenden

   Da in MSWLogo alle Windowselemente wie z.B. Schalter, Schieberegler, Auswahllisten, usw. zur Verfügung stehen, kann man einfach Mikrowelten einrichten, die über diese Windows-Steuerungselemente bedient werden.

Diese vier beschriebenen Möglichkeiten können natürlich auch kombiniert werden. Man kann z.B. Schalter und Schieberegler für die Bedienung anbieten, gleichzeitig können die Nutzer aber noch Texteingaben machen. In welcher Kombination die Möglichkeiten präsentiert und zugelassen werden, hängt sicher von der Kompetenz der Nutzer und von dem Grad der Einflussnahme auf das System ab, welchen man dem Nutzer zugesteht.

2.5.4 Szenarien für den Einsatz des LOGO-Systems

Im Unterricht zur Demonstration

LOGO kann im Klassenunterricht genutzt werden um Probleme aufzuwerfen, Problemlösungen auszuprobieren oder zu demonstrieren. Voraussetzungen dafür sind eine Projektionsmöglichkeit und falls Gruppenergebnisse präsentiert werden sollen, die Vernetzung der Computer.

Arbeit in Mikrowelten

Dies ist die traditionelle Arbeitsweise mit LOGO. Es wird in Partnerarbeit oder Einzelarbeit in einer LOGO-Mikrowelt im Rahmen von Freiarbeitsphasen oder an Stationen gearbeitet. Es arbeiten entweder alle Schüler in der selben Mikrowelt oder man bietet im Rahmen von Stationenarbeit verschiedene Mikrowelten an. Dazu braucht man keine spezielle Ausstattung, Einzelrechner genügen.

Gruppenarbeit

Das Arbeiten in Mikrowelten kann man sich auch als Gruppenarbeit organisiert vorstellen. Verschiedene Gruppen arbeiten an unterschiedlichen Teilproblemen, die dann in einer Präsentationsphase vorgestellt oder in Form eines Gruppenpuzzles zusammengeführt werden. Vernetzung und Gruppenarbeitssoftware sind die technischen Voraussetzungen.

Weitere Möglichkeiten, die LOGO bietet, wurden weiter oben schon genannt:

- Capture-Replay Tool:

  Arbeitsverläufe und Strategien von Nutzern können aufgezeichnet und dann wieder abgespielt werden, um sie auszuwerten, die Nutzer dazu zu befragen oder um sie anderen Nutzern vorzuspielen, damit man deren Reaktionen bekommt. Diese Möglichkeit ist besonders interessant, wenn im Unterricht Forschungsfragen nachgegangen wird, da der Computer die Schülerbeobachtung übernimmt und die Auswertung später gemacht werden kann.

- Visualisierungstool:

  Daten können eingelesen und dann grafisch dargestellt werden. Die Arbeitsverläufe oder Strategien können im Ablauf verlangsamt oder im Zeitraffer dargestellt werden. Neben diesen videoähnlichen Möglichkeiten bietet LOGO als Programmierumgebung aber auch die Möglichkeit, die Visualisierungen zu variieren, übereinander zu legen oder zu verändern um z.B. bestimmte Parameter hervorzuheben.

- Prototypingtool

  Prototypen von Mikrowelten können schnell erstellt werden und beim Austesten im 'laufenden Betrieb' verändert und weiterentwickelt werden. Besonders beim Einsatz im Unterricht, wo man schnell auf Ideen von Schülern reagieren können muss, bietet ein solches System, falls man es beherrscht, Vorteile.

2.6 Mikrowelten statt 'Lernermodellierung'

2.6.1 Grundsätzliche Überlegungen

Wenn die Darbietung von Inhalten und von bestimmten Zusammenhängen in einer Mikrowelt beim Lernenden die Entstehung eines mentalen Modells bewirkt, liegt es nahe, sich vor der Gestaltung eines Lernsystems darüber Gedanken zu machen, wie solch ein mentales Modell aussehen sollte und wie die entsprechenden Metaphern in der Mikrowelt gestaltet sein müssen.

Man vermutet, dass Multimedialität die Bildung komplexer mentaler Modelle mit unterschiedlichen Repräsentationsformen fördern kann. *'Die multiplen Repräsentationsformen, die charakteristisch für mentale Modelle sind, legen auch eine multicodale Enkodierung der Informationen für die Konstruktion eines mentalen Modells nahe. Die dynamischen Charakteristika von mentalen Modellen, der Wechsel zwischen unterschiedlichen Zuständen und ihre Auswirkungen, können durch Präsentationsweisen gestützt werden, die Dynamik vorführen oder die sich durch die Lerner auf Wunsch dynamisieren lassen. Topographische Informationen (etwa das Aussehen von Elementen eines Gerätes und ihre räumliche Anordnung) lassen sich am besten durch bildhafte Codierungen, also durch Abbildungen und schematisierte Grafiken, präsentieren.'* [WEIDENMANN 1997a, 74]. Andererseits sollten Lernumgebungen aber auch nicht überfrachtet sein, wie die Diskussion um den 'cognitive Overload' zeigt. So macht auch POHL darauf aufmerksam, dass zu viele Interaktionsmöglichkeiten Benutzer eher verunsichern. Eine ausreichende Funktionalität bei gleichzeitiger Reduktion der *'...angezeigten Handlungsoptionen ist durch geschickte Gestaltung möglich, z. B. indem Buttons nur dann eingeblendet werden, wenn sie auch tatsächlich sinnvoll sind. ... Eine einfache Empfehlung, die noch heute von vielen Entwicklern nicht beachtet wird, ist die einheitliche Kennzeichnung von Objekten, mit denen Interaktionen möglich sind (z. B. farbliche Hervorhebung und Veränderung des Mauszeigers). In die selbe Gruppe pragmatischer Empfehlungen fällt die Forderung nach visuellem Feedback, wenn eine Aktion ausgelöst, z. B. ein Button gedrückt wurde. Besonders wichtig ist dies bei Aufgaben, die etwas längere Zeit in Anspruch nehmen. Daneben sollten störende*

Effekte vermieden werden, wie beispielsweise ständiges Blinken innerhalb einer Seite, auf der ein anspruchsvoller Text zu finden ist.' [POHL 1995, 156]

[KRISTOF/SATRAN 1995, 90f] machen darauf aufmerksam, dass auch allgemeine Lesegewohnheiten und Interpretationsstrategien beachtet werden sollten, da Abweichungen zu Verwirrung und Missverständnissen führen können. Im westlichen Kulturkreis sind dies beispielsweise:

- Die Lese- und Betrachtungsrichtung verläuft von links oben nach rechts unten.
- Die Darstellungsgröße von Objekten impliziert deren Bedeutung.
- Eine Plazierung oberhalb anderer Objekte steht für eine vergleichsweise größere Wichtigkeit bzw. Rangfolge.

[WEIDENMANN 1997b, 108ff] unterscheidet folgende Funktionen für Abbilder, die im Kontext von Lernsystemen von Bedeutung sind:

- ***Zeigefunktion***: Darstellung eines Gegenstands oder von Teilen eines Gegenstands
  Viele Gegenstände oder Sachverhalte (wie z. B. Bewegungsabläufe) lassen sich durch ein Bild wesentlich besser wiedergeben als verbal beschreiben. Dabei kann eine stärker schematisierte Darstellung, die Unwichtiges weglässt und Wichtiges hervorhebt, durchaus besser geeignet sein, als eine realitätsnähere Abbildung.
- ***Situierungsfunktion***: Beschreibung eines situativen Kontextes, z. B. für eine Aufgabenstellung
  Bilder können eine Konkretisierung der Aufgabe bieten, sie knüpfen damit im Idealfall an Erfahrungen des Lernenden an. Sehr realistische Abbilder sind zwar tendenziell am besten zur Situierung geeignet, können aber auch ablenken.
- ***Konstruktionsfunktion***: Unterstützung der Bildung eines adäquaten mentalen Modells zu einem Sachverhalt oder Gegenstand
  Abbilder für diese Funktion sind i. allg. stark schematisiert. Bei Prozessabläufen sind Animationen im Sinne der Konstruktionsfunktion meist besser geeignet.

Alle diese neueren Veröffentlichungen beziehen sich aber eher auf Multimediaanwendungen als auf Mikrowelten.

[LAWLER 1984, 46] weist darauf hin, dass eine Mikrowelt um eine schlagkräftige Idee (*'powerful idea'*) aufgebaut sein muss. Er nennt auch vier Kriterien, für solche Ideen: *'they should be simple, general, useful and syntonic.'* Weiter weist er darauf hin, *'the syntonic characteristic focuses on how an idea assumes* *within the mind of an individual... An idea gains power, if it can be reduced to a concrete model that serves as a metaphor for the interpretation of subsequent problems.'* Falls dies gelingt, können Kinder diese Metapher nutzen, um selbständig in der Mikrowelt zu arbeiten.

Für ein Forschungsprojekt, wie das hier dargestellte, ist dies aber unabdingbar. Lernende müssen völlig selbständig ohne Lehrereinfluss in ihrer Mikrowelt arbeiten können. Die Kinder sollen ja ihre internen mentalen Modelle in einer Logoumgebung, die die passenden Metaphern anbietet, explizieren. Deshalb können die Programme auch keine Lernprogramme im herkömmlichen Sinne sein, sondern müssen wirklich ganz offene, einfache Mikrowelten sein. In der Überschrift zu diesem Kapitel taucht auch noch der Terminus 'Lernermodellierung' auf, der im Zusammenhang mit Lernprogrammen häufig gebraucht wird, um innovative Lernprogramme zu kennzeichnen. Nach allem bisher Gesagten ist aber sicher jedem klar, dass 'Lernermodellierung' keine Begrifflichkeit des konstruktivistischen Ansatzes ist, sondern ganz eindeutig instruktionalistische Ideen verkörpert, es sei denn man interpretiert den Begriff um in 'der Lerner modelliert seine Mikrowelt.' Es geht also nicht um 'Lernprogramme und Lernermodellierung' sondern um 'Mikrowelten und selbstbestimmtes Lernen'. Damit sind gleichzeitig auch die beiden, von den beteiligten Lehrkräften am häufigsten gestellten Fragen geklärt, wie die 'Lernprogramme' im CEKA-Projekt eigentlich aussehen und was die Kinder dabei lernen sollen.

2.6.2 Entwurfsansatz für die Mikrowelten

Bei der Gestaltung der Mikrowelten wurde versucht, die o.g. Grundsätze möglichst zu berücksichtigen. Die Hauptidee oder wie Papert sagen würde, die powerful idea, ist:

> ***Der LOGO-Igel kann genau wie ich selbst an einem versteckten Zahlenstrahl zu einer gesuchten Zahl gehen, er hat 'Zahlenwissen' wie ich selbst.***

Bei allen Kindern wird in einer Einführungsstunde die Bewegungs- und die Meterstabmetapher sowie die Igelmetapher durch reales Bewegen im Klassenzimmer initiert. Der LOGO-Igel im Computer verhält sich dann entsprechend dieser eigenkörperlichen Erfahrungen. Er geht Schritt für Schritt oder in größeren Sprüngen an einem unsichtbaren Zahlenstrahl (Pfad) entlang bis er zu den gesuchten Zahlen kommt. Aufgabenstellung in allen Mikrowelten ist immer: 'Zeige dem Igel die gesuchte Zahl.' bzw. 'Dirigiere den Igel zu der gesuchten Zahl'. Damit soll die Explikation der eigenen mentalen Zahlenstrahlvorstellung erreicht werden.

Da das Projekt in ersten Klassen durchgeführt wurde, musste man davon ausgehen, dass die meisten Schüler keine Computererfahrung haben. Aus diesem Grund und um die Mikrowelten zu testen, wurde in einer Voruntersuchung in einer Eingangsklasse mit verschiedenen Eingabemedien experimentiert. Die Direkteingabe am Monitor über einen touchscreen ließ sich aus finanziellen Gründen nicht verwirklichen. Beim Vergleich der Eingabe über einen Stift auf einem Grafiktablett mit der Eingabe mit Hilfe der Maus zeigte sich, dass die Maus kontrollierter bewegt werden kann und dass alle Schüler motorisch die Maus sehr schnell in den Griff bekommen. Deshalb konnte die technische Basis für alle Klassen wie folgt festgelegt werden: Computer mit Windows (ab 3.12 bis XP) und Mauseingabe.

Damit der LOGO-Igel bewegt werden kann, wird er an den Mauszeiger gebunden. Dadurch ist eine ständige visuelle Rückmeldung und eine Steuerung der Igelbewegung gewährleistet. Die Interaktionsmöglichkeiten sind beschränkt auf:

- Klick rechte Maustaste: Zahl setzen - dem Igel eine Zahl zeigen
- Klick linke Maustaste: Nächste Aufgabe
- Klick beide Maustasten: Programmende

Außerdem wird ein reales Igelbild oberhalb des Zahlenstrahls eingeblendet, das zwei Funktionen hat:

- Situierungsfunktion:

  'Der Igel gibt dir jetzt folgende Aufgabe ... ' bzw. 'Der Igel hat jetzt folgende Zahl zu suchen ...', analog zu den Aktionen mit dem Plüschigel in der Einführungsstunde. Für das Zeigen selbst wird das Dreieck des LOGO-Igels (Metapher: Igelnase) benutzt, da man damit genau auf einen Punkt zeigen kann. Außerdem gibt der Igel mit seiner Nase die Bewegungsrichtung nach rechts vor.
- Zeigefunktion:

  Anzeigen der Aufgabe

  Ende der Aufgabe: wenn das Kind den Igel an die richtige Stelle dirigiert hat und die Zahl gefunden ist, dann springt der Igel dorthin und freut sich.

Die folgenden Kriterien sind wichtig, damit die Mikrowelten in ersten Klassen genutzt werden können:

- Einfacher Einstieg:

  Die Mikrowelten werden über die Autostart-Funktionalität automatisch gestartet, das Kind sucht nur aus den drei angebotenen Mikrowelten durch Mausklick eine aus und arbeitet dann darin.
- Open ended:

  In den Mikrowelten kann beliebig lange gearbeitet werden. Dem Igel gehen die Aufgaben nie aus, man kann aber auch jederzeit aufhören, falls man keine Lust mehr hat weiterzuarbeiten.
- Textfreiheit:

  Die Mikrowelten sind textfrei, es muss nichts gelesen oder geschrieben werden. Nur zu Beginn trägt man den eigenen Namen ein.
- Einfache Interaktion:

  Die Mikrowelten werden nur direkt über die Maus gesteuert (s.o.), durch Bewegen der Maus oder Druck auf die Maustasten. Es gibt keine Menüs und Icons, das Befehlseingabefenster wird minimiert. Die Tastatur kann nach Eingabe des Vornamens zur Seite gelegt werden.
- Abbruchsicherheit:

  Da man nicht davon ausgehen kann, dass das Programm immer richtig beendet wird, muss die Protokollierung parallel zur Arbeit des Schülers stattfinden und nicht am Ende einer Aufgabe oder am Ende der Arbeit in der Mikrowelt. Die Daten werden deshalb nach jedem Mausevent sofort in die Protokolldatei auf der Festplatte geschrieben. Beim nächsten Event wird die Datei wieder geöffnet, um neue Daten anzuhängen. So bekommt man vollständige Daten, wobei die bearbeiteten Aufgaben aber durchaus unvollständig sein können.

2.6.3 Die LOGO Mikrowelten von CEKA

Die Untersuchung in den beteiligten Schulen fand im Rahmen eines von der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg geförderten Kleinforschungsprojektes (**CEKA**: **C**omputerunterstützte **E**igen-**K**onstruktionen im mathematischen **A**nfangsunterricht) statt:

'Wissen über Zahlen und mathematische Zusammenhänge wird von Kindern individuell konstruiert. Durch dem Einsatz von Logo-Mikrowelten, die Eigenkonstruktionen unterstützen, und mit Hilfe des mentalen Modells 'Logoigel' sollen Eigenkonstruktionen am Computer initiiert und untersucht werden. Durch die Computerunterstützung der Eigenkonstruktionen werden diese im Ablauf

dokumentierbar, beliebig oft wiederholbar und quantitativ und qualitativ auswertbar.' (Auszug aus dem Projektantrag)

Nach dem Start von Windows wird automatisch das Einstiegsfenster in die verschiedenen Mikrowelten geöffnet.

Über dieses Einstiegsfenster sind alle Mikrowelten zugänglich und man kann sich für eine entscheiden. Die Icons und Farben der Symbole im Einstiegsfenster werden verwendet um die Freiarbeit der Schüler zu organisieren. Jedes Kind, das eine Mikrowelt durchgearbeitet hat, klebt ein Kärtchen mit dem Icon in der entsprechenden Farbe auf eine Klassenliste, über welche dann die Freiarbeit organisiert wird.

Abb. 2.03: CEKA-Umgebung

Bei Fragen zum Programmstart und zur Progammbedienung können zwei ausgewählte Mitschüler Hilfestellung geben. Diese können den Computer bedienen und wurden einmal in die Programmbedienung eingewiesen. Die Lehrkräfte sollten nicht beteiligt sein.

Die Aufgaben in den Mikrowelten werden zufällig generiert. Die Zufallsreihenfolge muss aber bei jedem Schüler dieselbe sein, damit die Bearbeitungen vergleichbar bleiben.

Alle Mikrowelten versuchen, den mentalen Zahlenstrahl der Schüler und damit deren Zahlvorstellungen anzusprechen. Die Mikrowelten haben aber unterschiedliche Ausprägungen (s.u.).

2.7 Zusammenfassung

In diesem Kapitel sollte dargestellt werden, was LOGO ist und wieso LOGO für dieses Projekt besonders geeignet ist. Es wurde gezeigt, dass LOGO mehr ist ,als nur eine Programmiersprache. LOGO ist eine Lernphilosophie auf der Grundlage konstruktivistischer Ideen und damit aktueller denn je.

Ein kurzer Überblick über die Grundideen der Sprache und der Lernumgebung sollte zeigen, wie konzeptionell fortschrittlich LOGO auch heute in Zeiten der objektorientierten Programmierung noch ist. Weiter sollte deutlich gemacht werden, wie flexibel das System an ganz unterschiedliche Bedürfnisse angepasst werden kann.

Vor allem die Ausführungen über die Metaphern, die seit mehr als 20 Jahren Hauptbestandteil der LOGO-Philosophie sind, zeigen, wie aktuell die Ideen in LOGO gerade heute wieder werden, wo man nach neuen Wegen sucht, um das Lernen kindgemäßer, natürlicher, offener und damit erfolgreicher zu gestalten.

Die im letzen Teil dieses Kapitels kurz skizzierte Forschungsumgebung mit den Mikrowelten sollte zeigen, wie man auch mit einfachen Umgebungen, die man im LOGO-Kontext kaum Mikrowelten nennen würde, die Kinder zum selbständigen Lernen aktivieren kann. Entsprechende andere Mikrowelten können von Lehrern, sofern sie mit dem LOGO-System vertraut sind, zu vielen weiteren Themen des Mathematikunterrichts angeboten werden und damit das individuelle, selbständige Lernen bereichern. Schüler, die bei der herkömmlichen e-i-s-Pädagogik Probleme haben, könnten durch solche gezielt konstruierten Mikrowelten unterstützt werden. Eine ausführliche Darstellung der einzelnen Mikrowelten zstrich0, zstrich1 und zstrich2 findet sich unten.

Dass LOGO nach wie vor aktuell ist, zeigt ein Projekt in den USA, wo nach den schlechten Ergebnissen der Schüler bei der TIMS-Studie in den Bereichen Geometrie und Größen, ein Projekt, gefördert von der NSF (National Science Foundation), mit dem Thema 'LOGO and Geometry' [siehe JRME NR.10, 2001] durchgeführt wurde. Ziel des Projekts war die Erstellung eines neuen Curriculum K-6 für den Bereich Geometry mit einem forschungsbasierten Ansatz unter Verwendung von LOGO-Mikrowelten.

3 Fragen und Anlage der Untersuchung

3.1 Forschungsfragen

Auf Grundlage der Folgerungen aus den Kapiteln 1 und 2 ergeben sich nun zwei Ansätze für die empirische Untersuchung, zum einen ein mathematikdidaktischer und andererseits ein eher informatisch basierter Ansatz. Aus beiden Bereichen ergeben sich Fragestellungen, die das Lernen von Mathematik und das Lernen in Computer-Mikrowelten tangieren.

3.1.1 Mathematikdidaktische Fragen

Die mathematikdidaktischen Fragestellungen beschäftigen sich mit der Entwicklung des mathematischen Wissens im ersten Schuljahr. Schwerpunkte sind dabei Mengenbildung, Längenvorstellung, Zählfertigkeiten und Zahlvorstellung. Es werden folgende Bereiche und Fragen untersucht:

M1: Merkmale, Relationen und Zahlvorstellung

- Gibt es Zusammenhänge zwischen Mengenvorstellungen und (mentaler) Zahlvorstellung?

  Mengen werden über Merkmale und Relationen hergestellt. Deshalb wird Mengenvorstellung in Aufgaben zu den Bereichen 'Merkmale erkennen' und 'Ordnungen herstellen' abgebildet. Längenrelationen spielen keine Rolle.

M2: Längen schätzen und Zahlvorstellung

- Gibt es Zusammenhänge zwischen der Längenvorstellung und der (mentalen) Zahlvorstellung?

  Längenvorstellung wird operationalisiert durch Schätzaufgaben in Bildform, Schätzaufgaben mit Cuisenaire-Stäben und Wissen über den Aufbau des Lineals.

M3: Zählfertigkeiten und Zahlvorstellung

- Gibt es Zusammenhänge zwischen den Zählfertigkeiten und der (mentalen) Zahlvorstellung?

Zählen mit Objekten und ohne, verbales und mentales Zählen, also verschiedene Zählaufgaben bilden den Aufgabenpool zur Analyse der Zählfertigkeiten.

M4: Individuelle Entwicklung der mentalen Zahlvorstellung

- Wie entwickelt sich elaborierte (mentale) Zahlvorstellung bei verschiedenen Kindern?

  Mentale Zahlvorstellung wird in den verschiedenen Mikrowelten u.a. durch die Variablen Anzahl richtiger Lösungen, Strategiewahl, Zeit bis zum ersten Klick und maximale Abweichung von der gesuchten Zahl operationalisiert.

3.1.2 Informatische Fragen

Die informatischen Fragestellungen haben zum Ziel, zu klären, ob in einer computerbasierten Mikroweltumgebung selbständiges Arbeiten so möglich ist, dass sinnvolle Daten anfallen, die man dann auswerten kann, um etwas über die Lerngeschichte der Kinder zu erfahren. Hierzu werden keine statistischen Daten benötigt, sondern es werden die Gesamterfahrungen des CEKA-Projektes reflektiert:

I1: Selbständiges Arbeiten in LOGO-Mikrowelten

- Können Kinder der ersten Klasse, die nicht lesen und schreiben können, mit einem Computersystem selbständig arbeiten?

  Die Antwort auf diese Frage ergibt sich aus der Durchführung und aus den Gesamtdaten. Falls es gelingt aus der selbständigen Arbeit der Kinder in den Mikrowelten genügend auswertbare und belastbare Daten zu sammeln, kann man diese Frage positiv beantworten.

I2: Mikrowelten und individuelle Lerndaten

- Kann ein Computersystem sinnvolle Lerndaten (auch qualitativer Art) von Schülern in Form informatischer Protokolle sammeln, so dass dem Lehrer Hinweise auf den Lernstand sowie auf Defizite und Schwächen rückgemeldet werden können?

  Die Auswertung der individuellen Daten einzelner Kinder aus der Arbeit in den Mikrowelten gibt Hinweise, wie genau oder ungenau die Daten den individuellen Entwicklungsstand der Kinder abbilden.

3.2 Durchführung der Untersuchung

3.2.1 Planung und Ablauf

Die Hauptuntersuchung fand im Schuljahr 2001/2002 statt. Beteiligt waren ca. 200 Schülerinnen und Schüler in 11 Eingangsklassen aus 7 Grundschulen. Die Schulen selbst waren zufällig ausgewählt. Es waren Schulen mit städtischem und ländlichem Einzugsbereich, wie auch mehrzügige und einzügige Schulen vertreten. Bis auf eine Klasse wurden alle Schüler in Jahrgangsklassen unterrichtet. Die Klassengröße variierte allerdings stark von 6 bis 27 Kindern pro Klasse. Im Laufe des Schuljahres konnte außerdem eine relativ große Fluktuation festgestellt werden. Kinder verließen die Klassen und andere kamen dazu. Da es sich um Eingangsklassen handelte war auf Wunsch der Lehrkräfte vereinbart, mit dem Projekt und mit den Tests erst nach den Herbstferien im Oktober zu beginnen. Aus der folgenden Tabelle kann man die Zahlen der Teilnehmer in den einzelnen Testphasen herauslesen. Die Zahlen umfassen nur Kinder, die während der ganzen Zeit an dem Projekt beteiligt waren - Schulwechsler und neu Hinzugekommene sind herausgerechnet.

	Anzahlen						
Schule(Klasse)	Klasse	E.Test	E.Std.	C01	C02	C03	A.Test
Bittenfeld 1a	18	17	17	16	10	4	16
Erdmannhausen 1a	27	22	19	18	12	8	22
Erdmannhausen 1b	27	25	25	18	4	1	25
Gündelbach	13	10	10	10	13	12	10
Hoheneck 1a	20	20	19	18	12	0	19
Hoheneck 1b	20	19	19	19	12	6	17
Neustadt 1a	21	21	21	20	19	0	18
Neustadt 1b	21	18	20	17	10	2	20
Neustadt 1c	21	21	17	21	21	0	21
Riet	6	6	6	6	6	6	6
Rosswag	13	13	13	13	13	13	13
Summen:	***207***	***192***	***186***	***176***	***132***	***52***	***187***

Tab. 3.01: Übersicht Schulen und Teilnehmerzahlen

(Erklärung: E.Test=Eingangstest; E.Std.=Eingangsstunde; C01=Computer-Mikrowelt01; C02=Computer-Mikrowelt02; C03=Computer-Mikrowelt03; A.Test=Abschlusstest)

Die Computerausstattung der einzelnen Schulen war vergleichbar und für Grundschulen typisch. Es standen in den Klassenzimmern jeweils ein bis zwei Computer zur Verfügung. Die Zahl der zur Verfügung stehenden Geräte und vor allem die Klassengröße führten dazu, dass in größeren Klassen nicht alle Schüler alle Computer-Mikrowelten durcharbeiten konnten. Die

Unterrichtskonzeption, also ob eher Klassenunterricht oder offene Unterrichtsformen mit Freiarbeit durchgeführt wurden, hatte keinen wesentlichen Einfluss auf die Teilnehmerzahlen bei der Computerarbeit.
Die Untersuchung gliedert sich inhaltlich in drei Teile:

- Untersuchungen zu mathematischen Fertigkeiten und Fähigkeiten
  Hierzu wurden verschiedene Tests durchgeführt, um die Ergebnisse aus den Computermikrowelten in einen Gesamtkontext 'mathematische Leistung' einbetten zu können.
- Datensammlung in Computermikrowelten und Auswertung dieser Daten.
  Dieser Teilbereich umfasst die Planung und Entwicklung der Mikrowelten und der Datensammlung in diesen, sowie die Entwicklung von Werkzeugen für den Auswertungsprozess der gesammelten informatischen Protokolle.
- Mentale Zahlvorstellung in den Computermikrowelten
  Die Daten aus den mathematischen Tests und den Mikrowelten werden gegeneinander gestellt und auf Zusammenhänge untersucht, um Aussagen zur mentalen Zahlvorstellung der Kinder machen zu können.

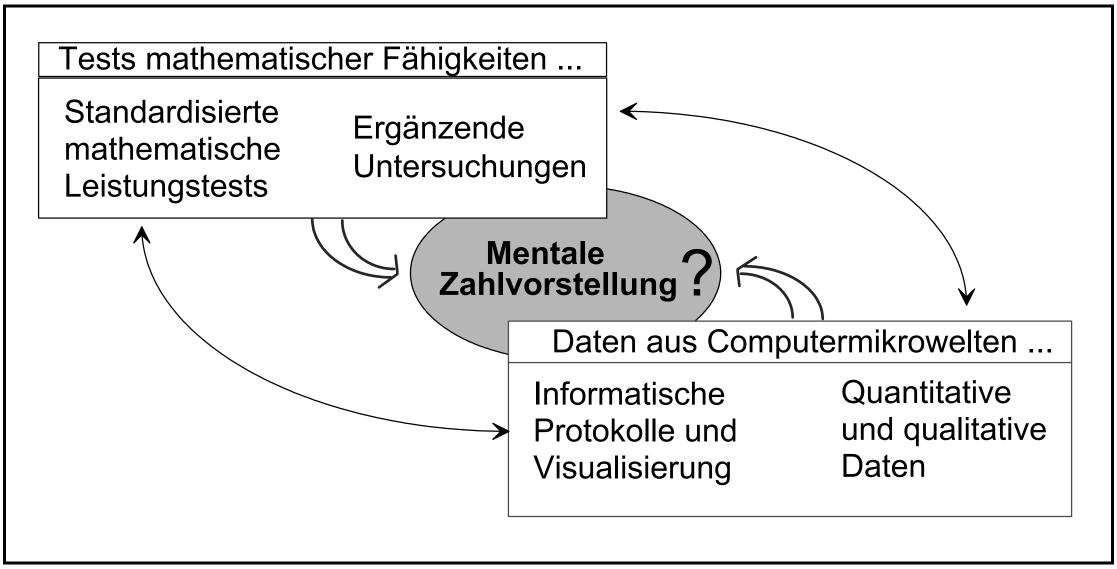


Abb. 3.01: Bereiche der Untersuchungen

Eine ausführliche Grafik mit allen einzelnen Untersuchungen, zur Orientierung und zum zeitlichen Ablauf, sowie zu Testmethoden und Hinweise zu den Kapiteln, in denen die einzelnen Untersuchungen beschrieben und ausgewertet werden, findet sich in *Anlage A0*.

Nach umfangreichen Vorarbeiten begann der Untersuchungszyklus in allen Klassen mit einer Eingangsuntersuchung (Teile aus UGT: Utrechter Zahlbegriffstest bzw. OTZ; siehe [KAUFMANN 2001, 64ff.]). Neben der Messung des mathematischen Grundwissens wurden auch demographische Daten der Schüler erhoben: Geschwister (ältere, jüngere), Computerausstattung zu Hause, Wissen über Computer usw. Um einen Überblick über den Stand des Unterrichts in den Klassen zu erhalten, wurden Stoffverteilungspläne und die zu Testbeginn aktuellen Schulbuchseiten erfasst.

Im Anschluss an den Eingangstest wurde in allen Klassen dieselbe Einführungsstunde gehalten, um damit bei den Kindern den Aufbau eines mentalen Modells für die Aktivitäten in den Mikrowelten, für das Verhalten des LOGO-Igels und den Aufbau einer fundamentalen Strategie zur Arbeit am unvollständigen Zahlenstrich zu initiieren. Am Ende dieser Stunde wurde versucht, den Wissensstand der Schülerinnen und Schüler und deren Grundstrategien durch ein Arbeitsblatt, das die LOGO-Mikrowelt abbildete, zu erfassen.

Anschließend begannen die Kinder, in den Mikrowelten zu arbeiten. Die einzelnen Schulen und Klassen wurden regelmäßig reihum besucht, um bei Computerproblemen helfen zu können, die zwischenzeitlich angefallenen Computerprotokolle zu sichern und um einzelne Kinder bei ihrer Arbeit in den Mikrowelten zu beobachten.

Am Ende des Schuljahres wurde in allen Schulen ein Abschlusstest (mathematischer Leistungstest DEMAT 1+) durchgeführt. In zwei Klassen wurden am Ende des zweiten Schuljahres noch einmal die Mathematiknoten erhoben.

Neben der eigentlichen Untersuchung wurden außerdem an der Hochschule in zwei Seminaren bei Mathematik- und Deutschstudierenden Strategien für das Auffinden von Zahlen am Zahlenstrahl erhoben, um dann auf der Grundlage dieser 'Expertenstrategien' die Strategien der Kinder bewerten zu können.

Im Anschluss an die Hauptuntersuchung begann die Aufbereitung und Auswertung der Computerprotokolle.

3.2.2 Vorarbeiten

Bereits im Schuljahr 2000/2001 begannen die Vorarbeiten zu dem Projekt mit ersten Tests in zwei Schulpraxisklassen. Dabei wurden die Programme und Mikrowelten getestet, und es wurde mit verschiedenen Eingabemedien wie Tastatur, Grafiktablett, Maus und Touchpad experimentiert. Die Befürchtung, dass Kinder mit der Maus schlecht Eingaben machen können, erwies sich als unbegründet, weshalb die Maus als Standardeingabegerät für die grafische

Oberfläche genutzt wurde. Die Aktionen der Schüler am Computer wurden durch schriftliche Protokolle und durch Videoaufnahmen dokumentiert. Bei diesem Probedurchlauf und der Weiterentwicklung der Programme wurde schnell deutlich, dass das Untersuchungskonzept, das zunächst sechs unterschiedliche Mikrowelten und eine vergleichende Untersuchung vorsah, revidiert werden musste. Aufgrund der Computerausstattung und der Organisation der Computerarbeit in Freiarbeitsphasen wurde deutlich, dass sich die Arbeit in den Mikrowelten zeitlich strecken würde. Deshalb wurden statt sechs nur drei Mikrowelten eingeplant. Durch den langen Zeitraum und bei nur drei Arbeitsphasen der Schüler am Computer war auch klar, dass eine Vergleichsuntersuchung keine belastbaren Daten liefern würde. Zum Abschluss dieser Phase wurde dann als mathematischer Leistungstest der SBL I (Schultestbatterie zur Erfassung des Lernstandes in Mathematik, Lesen und Schreiben I) durchgeführt. Dabei zeigte es sich, dass der Test selbst keine genügende Trennschärfe aufwies, also unbrauchbar war.

Parallel zu den ersten Aktionen in den Mikrowelten wurden auch Eigenkonstruktionen von Kindern am Rechenstrich (leerer Zahlenstrahl) auf Papier beobachtet.

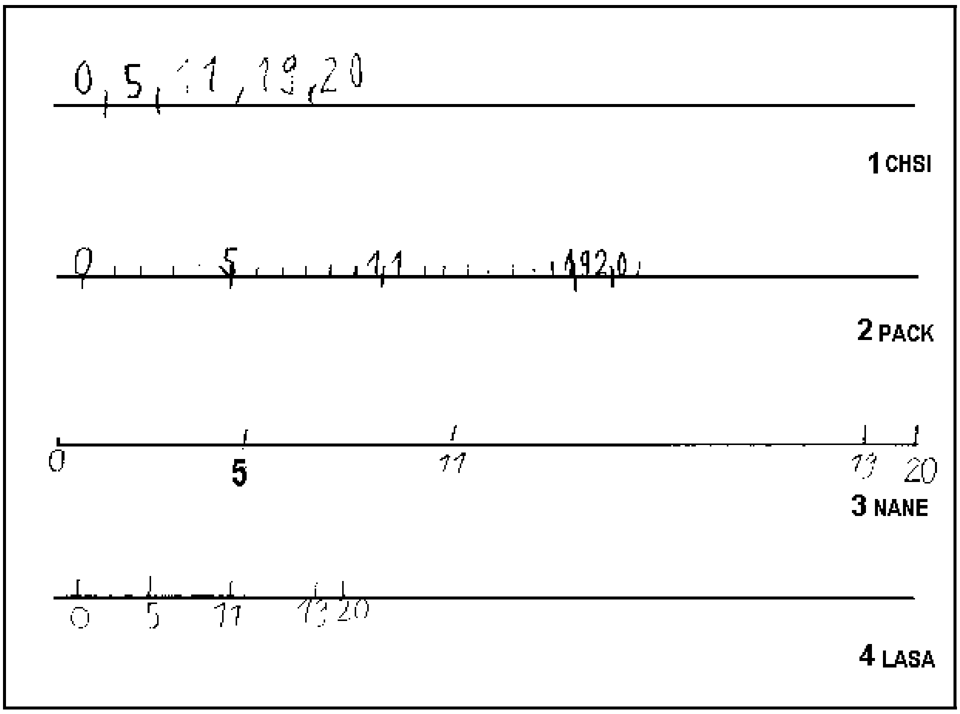


Abb. 3.02: Papier-Bleistift Konstruktionen des Zahlenstrahls

Bei diesen Papier/Bleistift Konstruktionen am Zahlenstrahl wurde schon deutlich, dass die Kinder ihre Konstruktionen mit ganz unterschiedlichen Strategien aufbauen. Dies sind einerseits Zählstrategien, die den Zahlenstrahl schrittweise aufbauen (Abb. 3.02: 2) und andererseits operative Strategien (Abb. 3.02: 3 und 4), bei denen der gesamte Kontext, also das Wissen über die Zahlen in der Umgebung, genutzt wird (siehe [KLAUDT 2003, 63f]: *'How children construct the number line.'* und [KLAUDT/SPANNAGEL 2004, 248f.]). Diese Strategien können aber nur während der Konstruktion beobachtet, oder an der fertigen Konstruktion durch Interviewtechniken ans Licht gebracht werden. Damit sind Untersuchungen in größeren Populationen kaum möglich, weil zu zeitaufwändig.

Nach Abschluss und auf der Grundlage der Erfahrungen aus den Vorarbeiten wurde versucht, die Arbeit in den Computer-Mikrowelten in einen Gesamtrahmen aus mathematischem Eingangstest, Erhebung der Grundstrategien und mathematischem Abschlusstest einzubetten. Durch dieses Setting sollten mögliche Zusammenhänge zwischen mathematischen Fähigkeiten und Strategien sowie der Arbeit in den Mikrowelten erfasst werden. Auch die Idee, die Entwicklung einzelner Kinder im Bereich mathematischer Fähigkeiten mit der Entwicklung von Strategien in den Computermikrowelten wenigstens in Ansätzen vergleichen zu können, bestimmte diesen Gesamtplan des Projekts. Die Zusatzerhebungen (Beobachtung einzelner Kinder, Expertenstrategien, Zeugnisnoten) dienten ausschließlich dazu, gemachte Annahmen über das Vorgehen bei der Arbeit in den Mikrowelten (Beobachtung einzelner Kinder, Expertenstrategien), bzw. Beobachtungen über Entwicklungsverläufe einzelner Kinder (Zeugnisnoten) abzusichern.

3.2.3 Eingangsuntersuchung

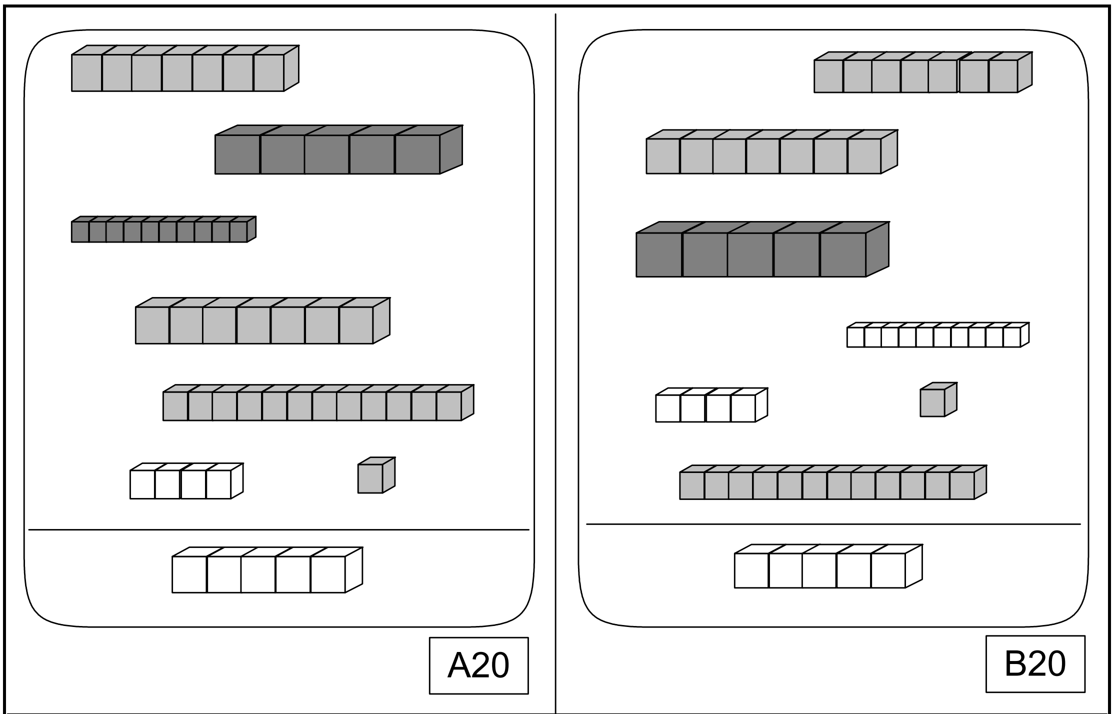
Die Eingangsuntersuchung wurde innerhalb einer Woche kurz vor den Herbstferien in allen Klassen als Gruppentest (Aufgaben G1 - G25) und als Einzeltest (Aufgaben E26 - E35) durchgeführt. Die Aufgaben wurden in Bildform mit Testanweisungen präsentiert. Die Bearbeitungszeit war vorgeschrieben.

Der Gruppentest wurde von mir selbst in allen Klassen durchgeführt, bei den Einzeltests mit den Schülern wurde ich von einer Gruppe von acht Studierenden unterstützt, die in die Testdurchführung eingewiesen waren. Beim Gruppentest wurden eine A und B-Form von Testheften benutzt. Die Bilder der Einzelaufgaben waren hierzu in ihren Anordnungen verändert, so dass die Testanweisungen für beide Formen gleich bleiben konnten (Bsp. s. u. Abb. 3.03) Zusammen mit dem Einzeltest wurden außerdem demographische Daten sowie Daten zur Computerausstattung und zum Computergrundwissen der Schülerinnen und Schüler erhoben.

Der mathematische Eingangstest bestand aus 35 Aufgaben (G01 bis G25 und E26 bis E35) zu folgenden Bereichen:

- Merkmale, Relationen und Ordnungen erkennen
- Zählen
- Längen schätzen
- Längen vs. Anzahlen erkennen

Die Aufgaben 1 und 5 waren Kontrollaufgaben, um die Testanweisungen zu erklären und zu kontrollieren. Aufgabe 25, am Ende des Gruppentests, war eine freie Aufgabe ohne Zeitlimit. Alle anderen Aufgaben wurden im Gleichtakt durchgeführt. Die folgende Abbildung zeigt die beiden Ausprägungen (A- und B-Form) von Aufgabe 20 mit der entsprechenden Arbeitsanweisung.



A/B20: Hier siehst du zusammengesteckte Schlangen aus verschiedenen Würfeln. Kreuze die Schlange an, die genauso lang ist wie die Würfelschlange unten!

Abb. 3.03: Beispiel Testaufgabe Eingangstest A/B20 mit Arbeitsanweisung

Weitere Beispiele für Aufgaben der Testbogen sind am Ende der Arbeit einzusehen *(siehe Anlage A1/A2).*

3.2.4 Einführungsstunde

Die Unterrichtsstunde zur Einführung der Igelmetapher und zur Initiierung der Grundstrategien *'Vorwärtsgehen mit Vorwärtszählen'* und *'die Zahl zeigt die Anzahl der Schritte, die der Igel machen muss'*, wurde vom Autor in allen Klassen in den beiden Wochen nach den Herbstferien durchgeführt. Nach der Einführungsstunde, in der das mentale Modell LOGO-Igel sowie die Minimalstrategieen vermittelt wurden, begannen die Kinder in den Mikrowelten zu arbeiten. Von den Einführungsstunden wurden Videoaufzeichnungen angefertigt, um die Vergleichbarkeit kontrollieren zu können. Der Ablauf der Unterrichtseinheit war in allen Klassen gleich *(siehe Anlage B1).*

Am Ende der Stunde mussten alle Kinder ein Aufgabenblatt (Auszug siehe Abb. 3.04) bearbeiten.

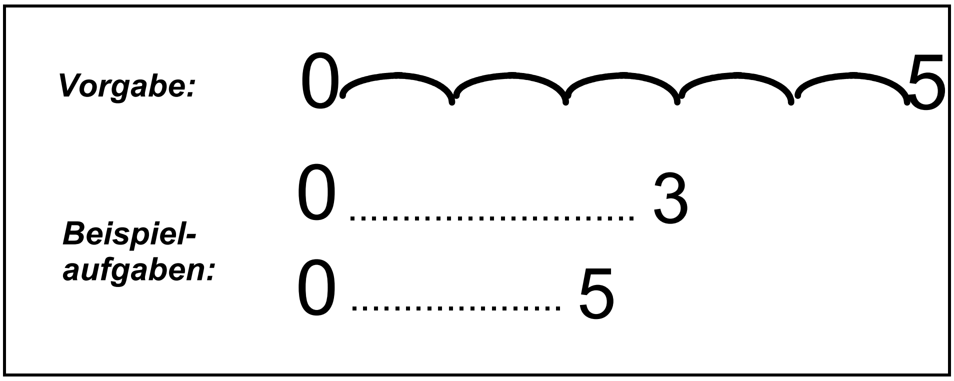


Abb. 3.04: Einführungsstunde - Beispielaufgaben Arbeitsblatt

Damit wurden zwei Punkte untersucht:

- ist die Grundstrategie des Vorwärtsgehens, 'die Zahl selbst zeigt die Anzahl der Schritte bis zur Zahl an', verstanden und
- wurde die Idee der Proportionalität, 'die Strecke bis zur gesuchten Zahl geteilt durch die Anzahl der Schritte erzeugt die Schrittlänge', verstanden *(vollständiges Arbeitsblatt siehe Anlage B2).*

3.2.5 Arbeit in den Mikrowelten

Alle Mikrowelten versuchen, bei den Kindern Vorstellungen zum mentalen Zahlenstrahl und zu den Zahlvorstellungen zu aktivieren und sollen die

Kinder gleichzeitig anregen, ihre Vorstellungen zu explizieren. Die Mikrowelten haben aber verschiedene Kontexte und Ausprägungen, die im Folgenden beschrieben werden. Die Reihenfolge der Aufgaben in den verschiedenen Mikrowelten ist zufällig generiert, die Zufallsfolge innerhalb einer Mikrowelt ist aber immer gleich. Eine Übersicht über die, in den Mikrowelten generierten Aufgaben, findet sich am Ende der Arbeit *(siehe Anlage C1).*

Zstrich0

Der Igel sucht eine Zahl. Zeige dem Igel wo die Zahl ... ist !

Umgebungsbereich: Zahlen 0 bis 20, nur die Vorgabestrecke wird angezeigt.

Der LOGO-Igel sitzt in dieser ersten Mikrowelt bei Null und wartet auf die Hilfe des Kindes. Die Skalierung ist bei jeder Aufgabe gleich, ein Einerschritt ist so lang wie das Igel-Dreieck. Die Zahl 1 ist also bei der Spitze (Nase) des LOGO-Igels.

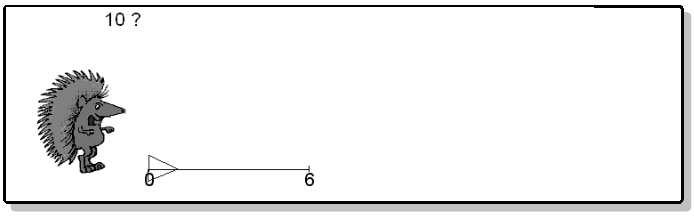


Abb. 3.05: Zstrich0 - Aufgabenstellung

Damit wird zunächst einmal die primitivste Strategie, um die Zahl zu finden, angedeutet, nämlich ab Null vorwärtszählen in Einerschritten.

Die richtige Stelle und damit die Lösung ist gefunden.

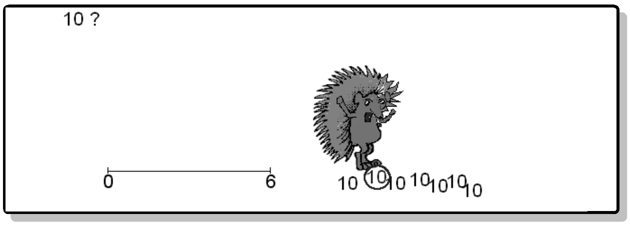


Abb. 3.06: Zstrich0 - Aufgabe gelöst

Die Zahl wird farblich hervorgehoben, um anzuzeigen, dass sie gefunden ist. Der Igel springt an die entsprechende Stelle. Die nächste Aufgabe kann vom Kind durch Klick auf die rechte Maustaste angefordert werden.

Zstrich1

Schatzsuche: ein Schatz wird versteckt.

Umgebungsbereich 0...10...20.

Wechselnde Skalierung, so dass die Proportionalität aus den Vorgabestrecken 0...20, 0...10 oder 10...20 konstruiert werden muss.

Zunächst wird der Schatz gezeigt, der gesucht werden soll. Auch dieses Bild hat, wie vorher das Igelbild, sowohl Situierungsfunktion, als auch Zeigefunktion. Das Bild wird im Gegensatz zum Igel aber nicht bei der Zahl Null, dem Ursprung der Bewegungsmetapher, gezeigt, sondern rechts, am Ende des anschließend gezeigten Zahlenstrahls.

Abb. 3.07: Zstrich1 - Schatz wird gezeigt

Damit soll ein eher funktionales Vorgehen bei der Suche, also das Ausnutzen von bekannten Zusammenhängen wie z.B. die Zahl 5 liegt zwischen 0 und 10 usw., intendiert werden. Die Schüler sollen nicht von Null aus vorwärtszählen um die Zahl zu finden, sondern sich eher an 20 oder 10 orientieren.

Der Schatz ist bei der Zahl ... versteckt. Zeige dem Igel wo der Schatz ist!

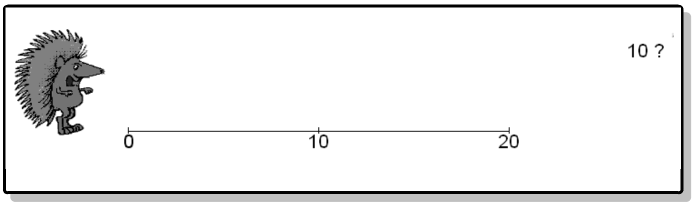


Abb. 3.08: Zstrich1 - Schatz ist versteckt

Der Schatz ist gefunden, die nächste Aufgabe kann angefordert werden.

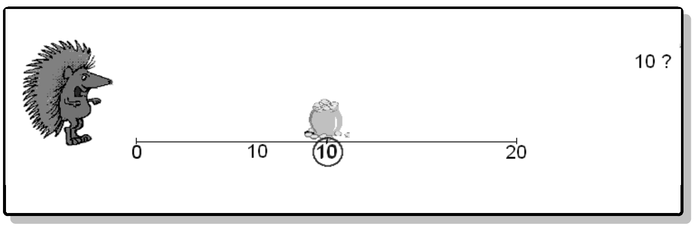


Abb. 3.09: Zstrich1 - Schatz ist gefunden

Zstrich2

Schatzsuche wie bei Zstrich1. Der einzige Unterschied ist die Vorgabe des Bereichs 0...20 ohne Stützpunktzahl 10.

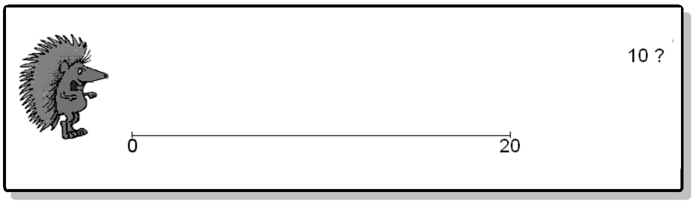


Abb. 3.10: Zstrich2 - Aufgabenstellung

Die Mikrowelten sind von der Aufgabenstellung und vom Aufbau her sehr ähnlich, damit die Schüler keine Verstehens- und Bedienprobleme bekommen. Es geht bei der Arbeit in den Mikrowelten nicht vordergründig darum, dass die Schüler etwas Neues lernen, obwohl sich das nicht vermeiden lässt. Sie sollen bei der Arbeit in den Mikrowelten ihre inneren Vorstellungen der Zahlanordnung zeigen, damit diese protokolliert und dann analysiert werden können.

3.2.6 Schlussuntersuchung

Für die Schlussuntersuchung wurde ein standardisierter mathematischer Leistungstest (DEMAT 1+, 2002) verwendet. Dieser wurde nicht nur gewählt, um den Aufwand möglichst klein zu halten, sondern vor allem, um dadurch eine größere Referenz, für die im CEKA-Projekt beteiligte Population zu bekommen. Der Test wurde in allen Klassen als Gruppentest durchgeführt.

3.2.7 Begleiterhebungen

Begleitende Befragungen und Beobachtungen

Während der Arbeit in den Computermikrowelten wurden noch einmal sechs Kinder genauer beobachtet.

nr	Arbeitsprotokoll (Beschreibung, *...wörtliche Äußerung*)
008	S. bewegt Igel direkt zu 6, zählt *'... sieben, acht , neun, zehn'* , (Schritte etwas zu klein), 1.Klick ..., weiter Richtung 10, 2.Klick gefunden (2)
014	S. führt den Igel direkt zu 6, bewegt den Igel schrittweise Richtung 10, (zu große Schritte), sucht Richtung 10, 1.Klick, 2.Klick, 3.Klick,gefunden (3)
017	Direkt ab 6, schrittweise Richtung 10 zählt: *'... sechs, sieben, acht, neun, '* (zu kleine Schritte) 1.Klick, sucht Richtung 10, gefunden (3)
035	Ab 6, drei kleine Schritte, testet die Mausbewegung, versucht den LOGO-I-gel abzuschütteln *'...der geht immer mit!'*, wieder zur 6 zählt *'...acht'*, 1.Klick, zählt *'...zehn'*, 2.Klick, gefunden (2)
213	Testet Mausbewegung, bei 5 1.Klick, zählt schrittweise ab 1, '... *Eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun, zehn'* , (Schritte zu klein), sucht

	und klickt, zählt ab 6, (Schritte zu groß), klickt, sucht und klickt Richtung 20, *'... Ich klick jetzt mal alle durch!'* , dann in die Lücken, gefunden (26)
214	Probleme die Maus zu positionieren, schafft es zur 6, zählt *'... sieben , acht, zehn'*, Klick, gefunden (1)

Tab. 3.02: Kurzprotokolle der Einzelbeobachtung - Beispiele

Von diesen wurde jeweils ein Arbeitsprotokoll der, bei den verschiedenen Aufgaben gewählten Strategien erstellt. Wie Tabelle 3.02 zeigt, wurde z.B. Aufgabe 1, Vorgabe 0 bis 6, gesucht 10 (vgl. 3.2.5), von verschiedenen Kindern (nr) ganz unterschiedlich bearbeitet.

Trotz der beobachteten individuellen Vorgehensweisen und Schwierigkeiten, wird in den Protokollen deutlich, dass fast alle Kinder als Strategie *'Zählen ab 6 in Einerschritten'* gewählt haben:

- Kind 035 geht ab 6 in zwei Schritten zur 10.
- Kind 213, das mit der umständlichsten Strategie beginnt, hat die größten Probleme. Es zählt ab 1 in Einerschritten, merkt bei der Markierung für die Zahl 6, wo es schon 'acht' zählt, aber nicht, dass die Schrittweite zu klein ist. Beim zweiten Versuch, ab 6, werden zu große Schritte gewählt und danach wird weiter Richtung 20 gesucht. Fehlende Größenvorstellung verhindert eine sinnvolle Korrektur der Suchrichtung. 10 wird eher zufällig gefunden, als das Kind auch die Lücken zwischen den schon gesetzten Zahlpunkten ausprobiert. Bei den anderen Aufgaben hatte das Kind ähnlich Probleme.

Die Beobachtung der anderen Kinder bei der Lösung weiterer Aufgaben zeigt außerdem, dass die gewählte Strategie auch immer vom Aufgabenkontext abhängt. Die einfachste Zählstrategie, 'vorwärts Zählen in Einerschritten', kann bei manchen Aufgaben die beste Strategie sein. Aus diesem Grund wurden in zwei Seminaren mit Studierenden die Strategien für die verschiedenen Aufgaben erhoben, die Erwachsene (Experten) wählen.

Expertenstrategien

Die 'beste Strategie' für die verschiedenen Aufgaben in den Computermikrowelten wurde bei insgesamt 34 Studierenden erfragt. Dazu wurden jeweils die Aufgaben am Computer eingespielt und die Studierenden mussten dann auf einen Fragebogen die ihrer Meinung nach optimale Strategie eintragen. Die möglichen Grundstrategien und deren Notation wurden vorher besprochen. Je nach Struktur der Aufgabe (Vorgabe - gesucht) werden unterschiedliche Strategien bevorzugt:

- ***Aufg01:*** Vorgabe 0 ... 6 ; gesucht 10

Zählstrategien und operative Strategien ungefähr zu gleichen Teilen.

- ***Aufg12:*** Vorgabe 0 ... 10 ; gesucht 5
  hauptsächlich operative Strategien.
- ***Aufg22:*** Vorgabe 0 ... 6 ; gesucht 4
  überwiegend Zählstrategien (vorwärts ab 0, rückwärts ab 6).
- ***Aufg32***: Vorgabe 0 ... 1 ; gesucht 1
  direkt zur Lösung.
- ***Aufg35***: Vorgabe 0 ... 10 ; gesucht 13
  überwiegend Zählstrategien (vorwärts ab 10).
- usw...

Eine ausführlichere Auswertung der Expertenstrategien ist in der *Anlage D1* dargestellt.

Mathematiknoten - Ende Klasse 2 (2 Klassen)

Um wenigstens im Ansatz einen Überblick über die längerfristige Entwicklung einzelner Kinder erkennen zu können, wurde am Ende von Klasse 2 noch in zwei Klassen die Mathematiknote erfragt.

3.3 Verarbeitung der informatischen Protokolle

Der Datenanalyseprozess läuft nach RUNKLER [2000, 2f.] in vier Stufen ab:

- Vorbereitung:
  Planung, Datensammlung, Merkmalsgenerierung, Datenauswahl.
- Vorverarbeitung:
  Normalisieren, säubern, filtern, ergänzen, korrigieren und transformieren der Daten.
- Mustererkennung:
  Korrelation, Regression, Modellierung, Klassifikation, Entscheidungsbäume, Clusteranalyse und andere Verfahren
- Nachbereitung:
  Interpretation, Dokumentation, Auswertung

Diese grobe Stufung ergab sich auch im CEKA-Projekt.

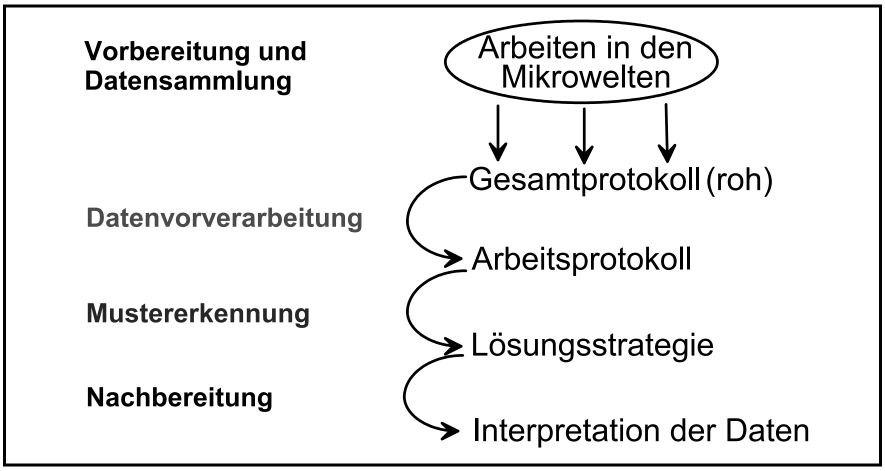


Abb. 3.11: Gesamtübersicht - Verarbeitung der Daten

In den Computer-Mikrowelten fielen einschließlich der Wiederholungen 475 Gesamtprotokolldateien einzelner Kinder an. Die darin enthaltenen über 18.000 Arbeitsprotokolle lassen sich kaum in einem vernünftigen Zeitraum per Augenschein klassifizieren - bei nur fünf Sekunden pro Datei würde diese Arbeit ohne Pausen 25 Stunden dauern. Deshalb war es auch Ziel des Projekts, diese Klassifizierung weitgehend zu automatisieren, also alle, oder wenigstens einzelne Strategien, automatisch zu erkennen. Die nach der automatischen Erkennung übrig bleibenden Restdaten können dann, so ist die Annahme, mit vertretbarem Aufwand durch eine Person mit 'Hand und Auge' klassifiziert werden. Diese hier kurz skizzierte Vorgehensweise wird in den folgenden Unterkapiteln als Abfolge kontrollierter Schritte der Visualisierung und Verarbeitung der Protokolldaten dargestellt.

Die Rohdaten waren zunächst im LOGO-ASCII Format gespeichert und mussten anschließend kontrolliert und für die Analyse durch verschiedene Programme (Filter) aufbereitet werden. Unterschiedliche Visualisierungen waren bei den einzelnen Verarbeitungsschritten hilfreich, um die Güte der Filter schnell zu kontrollieren.

Um den Lesern eine gute Vorstellung der verschiedenen Schritte des Datenverarbeitungsprozesses zu vermitteln, wird dieser nicht nur beschrieben, sondern es werden in den folgenden Absätzen jeweils immer zwei Standarddatensätze mit verschiedenen Strategien als Beispiele dargestellt. Die beiden Datensätze sind Protokolle folgender Aufgabe:

> *'Der Igel sucht eine Zahl. Zeige dem Igel wo die Zahl 10 ist !'* Vorgegeben ist der Zahlenstrahl (Weg des Igels) von 0 bis 6 (vgl. Abb. 3.02 und 3.03).

Die angewandten Strategien um zur Zahl 10 zu gelangen, sind folgende:

- Datensatz **P1**: Vorwärtszählen ab 6 bis 10 in Einerschritten, dann Suche an der vermuteten Stelle, bis die Zahl gefunden ist.
- Datensatz **P2**: Verdoppeln des Zahlenstrahls 0 bis 6, dann einen Zweierschritt zurück. Anschließend wieder Suche der Zahl am vermuteten Punkt.

3.3.1 Vorbereitung

Beim Entwurf der Mikrowelten musste neben der Gestaltung der Oberfläche und der Bedienelemente (vgl. 3.2.5) auch entschieden werden, welche Daten für die anschließende Auswertung in welcher Form aufgezeichnet werden sollten. Da die Kinder mit der Maus arbeiteten, wurden die Mausbewegung und Mausklicks der linken Maustaste aufgezeichnet. Der LOGO-Igel wurde an den Mauszeiger gehängt, so dass die Kinder den LOGO-Igel mit der Maus über den Bildschirm bewegen konnten. Bei den Beobachtungen der Kinder während ihrer Arbeit in den Mikrowelt-Prototypen zeigte sich dann, dass die Grundstrategie *'Vorwärtsgehen mit Zählen'* sich in der Mausbewegung durch schrittweises Verschieben der Maus mit Bewegungspausen darstellt. Die Schritte des Igels werden mit der Maus simuliert. Deshalb wurde entscheiden, nicht die gesamte Mausbewegung aufzuzeichnen, da dies sowieso ein zu großes Datenvolumen erzeugt hätte, sondern die jeweilige Position der Maus bei den kurzen Bewegungspausen. Es mussten folglich nur zwei Ereignisse unterschieden und gespeichert werden:

- **Mausstop** als Zählschritt, oder als Pause um eine neue Strategie zu überlegen.
- **Mausklick** um die gefundene Zahl anzuzeigen.

Zu jedem dieser Ereignisse wurden die gesuchte Zahl, die Vorgabezahl, die Mauskoordinaten und ein Zeitstempel gespeichert. Eine Beschreibung des Datenformats der Protokolldateien findet sich in *Anlage C2*.

3.3.2 Datenvorverarbeitung

Die folgende Grafik gibt einen Gesamtüberblick über die verschiedenen Verarbeitungsschritte der Datenvorverarbeitung.

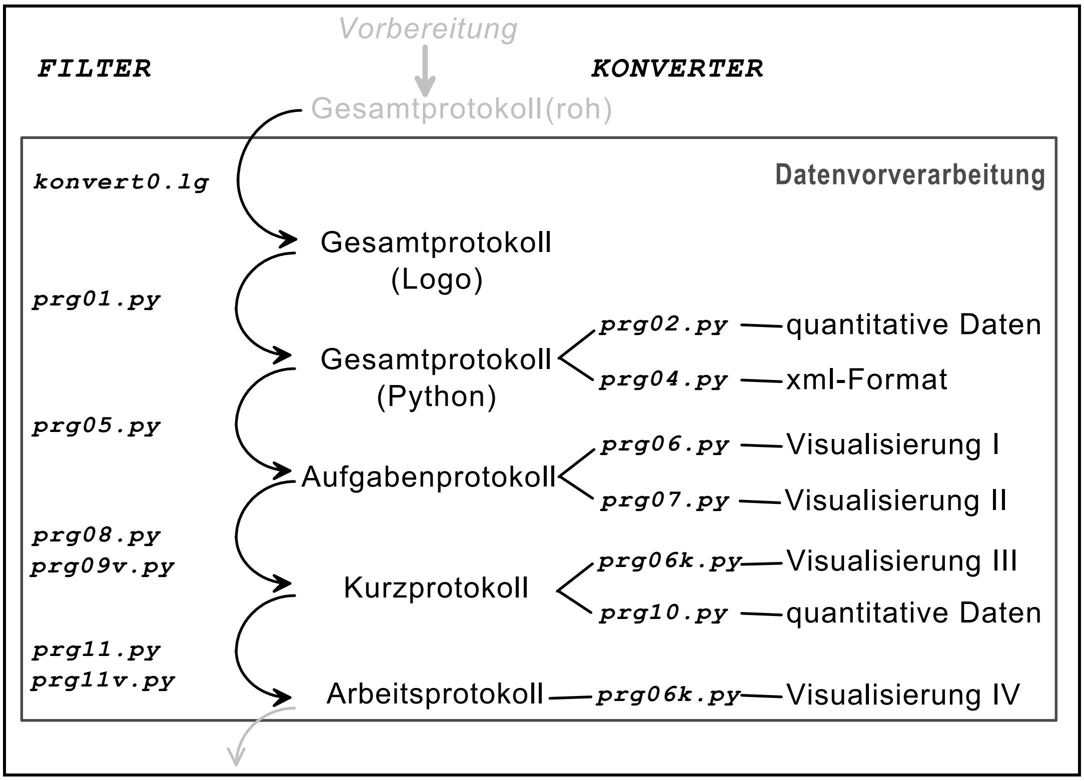


Abb. 3.12: Übersicht - Vorverarbeitung der Daten

Die einzelnen Verarbeitungsschritte werden weiter unten noch ausführlich beschrieben und dargestellt.

Ziel der Datenvorverarbeitung ist es, alle Daten in ein einheitliches Format zu bringen und, falls möglich, die Daten auf die wichtigen, aussagekräftigen Kerndaten zu reduzieren, um diese dann auswerten zu können.

Da es sich hier um eine Entwicklungsarbeit handelt, sind zunächst viele einzelne Verarbeitungsschritte, jeweils mit anschließender Kontrolle durch eine entsprechende Visualisierung, durchgeführt worden. Bei jedem Verarbeitungsschritt werden die Daten in den Dateien verändert und die Dateien neu geschrieben. Sie müssen deshalb kontrolliert werden. Nach Fertigstellung könnte die gesamte Vorverarbeitung dann in einem einzigen Programm oder Modul zusammengefasst werden.

Zur Reduktion und Aufbereitung für die weitere Auswertung wurden die Daten, wie oben dargestellt, in verschiedenen kontrollierten Einzelschritten bearbeitet:

- Aussortieren bzw. Nachbearbeiten defekter und unvollständiger Datensätze.

- Umwandeln der LOGO-Dateien in ein Format, das mit *Python* (s.u.) besser weiterbearbeitet werden kann.
- Aufsplitten der Gesamtdatensätze in die Einzelaufgaben und neue Kennzeichnung
- Reduktion der Daten eines Datensatzes durch Abschneiden der unwichtigen Teile.
- Weitere Reduktion der Daten durch Ausfiltern von Doppelstopps mit der Maus, bzw. Klick-Stopps die eng beieinander liegen.

Alle Arbeiten mit den Protokolltextdateien wurden mit einem *Python*-System und einzelnen Skripten durchgeführt. Python ist wie LOGO eine Interpretersprache, so dass man schnell und interaktiv Prototypen erstellen und testen kann. Im Gegensatz zu LOGO, ist Python aber für die Arbeit mit Dateien und mit Texten optimiert. Es bietet Module mit Funktionen und Objekten für alle nur denkbaren Operationen auf Texten sowie Konverter für viele Standardformate (siehe z.B. [MERTZ, 2003]). Bei vielen Verarbeitungsschritten wurden auch immer wieder Visualisierungen angefertigt, um einzelne Datensätze und die Qualität der Bearbeitung schnell kontrollieren zu können. Dazu wurden Konverter nach LOGO geschrieben, da das LOGO-System mit der eingebauten Igelgrafik für Visualisierungen viel besser geeignet ist als Python.

Für die Verarbeitung der Daten werden zwei unterschiedliche Typen von Programmen benötigt:

Filter: Die vorhandenen Daten werden bearbeitet, also korrigiert, verkürzt und konzentriert. Die Daten werden dabei verändert.

Konverter: Die Daten werden in ein anderes Format gebracht, um sie z.B in LOGO zu visualisieren oder in ein Statistikprogramm zur Weiterbearbeitung einlesen zu können. Das Datenformat wird geändert, die Daten selbst bleiben aber unverändert.

Da die Daten sehr umfangreich sind und deshalb unmöglich Dateien einzeln bearbeitet werden können, wurden außerdem von vielen Filtern und Konvertern jeweils zwei Typen angefertigt:

Typ **prg**: Die Programme bearbeiten alle Einzeldateien in einem Quellverzeichnis und schreiben diese bearbeitet in neu erzeugte Dateien oder gesammelt in eine Ergebnisdatei in einem vorgegebenen Zielverzeichnis.

Typ **prgv**: Die Programme arbeiten auf Dateibäumen, bearbeiten alle Dateien in den Verzeichnissen und legen eine entsprechende Struktur mit den bearbeiteten Dateien in einem Zielverzeichnis neu an, bzw. schreiben die Ergebnisse gesammelt in eine Ergebnisdatei.

Eine genauere Beschreibung der Programmtypen findet sich in *Anlage C3*.

Gesamtprotokoll

Das Aufgabenprotokoll ist die Aufzeichnung der Aufgabenbearbeitung eines Kindes in einer Mikrowelt. Für Kinder, die alle drei Mikrowelten je einmal durchgearbeitet haben, existieren somit drei Aufgabenprotokolle. Die Aufgabenprotokolle wurden dann durch ein LOGO-Programm (*konvert0.lg*, siehe *Anlage C3*) zunächst auf Korrektheit und Vollständigkeit überprüft, da Kinder z.T. ihren Namen falsch eingegeben oder mitten in der Bearbeitung den Computer ausgeschaltet hatten. Das nach der Konvertierung entstandene Rohprotokoll speichert alle Daten der Arbeitssitzung eines Kindes. Die Einzeldaten werden in einer Listenstruktur gesammelt, wobei ein Datensatz immer einer Liste entspricht. Eine ausführliche Darstellung dieser Struktur findet sich in *Anlage C2*.

P1: (ab 6 in Einerschritten vorwärtszählen)
[[[dieter] 7] [Thu May 27 18:07:28 2004] [18:07:51]] [0 6 10 300 -28 326 [18 7 30 27] x] [0 6 10 300 43 195 [18 7 31 10] x] [0 6 10 300 125 53 [18 7 31 65] x] [0 6 10 300 135 -43 [18 7 31 85] x] [0 6 10 300 170 -8 [18 7 32 19] x] [0 6 10 300 182 -6 [18 7 33 7] x] [0 6 10 300 214 -7 [18 7 33 62] x] ....
P2 (6 verdoppeln, dann 2 Schritte zurück)
[[[dieter] 7] [Thu May 27 17:08:46 2004] [18:09:01]] [0 6 10 300 -24 327 [17 8 49 37] x] [0 6 10 300 124 127 [18 8 49 37] x] [0 6 10 300 -11 34 [18 8 50 2] x] [0 6 10 300 0 1 [18 8 50 63] x] [0 6 10 300 119 18 [18 8 51 34] x] ....

Tab. 3.03: Beispieldaten - Rohprotokolle im LOGO-Format

Die Rohprotokolle im LOGO-Format werden korrigiert und listenweise in Zeilen dargestellt, es entsteht das Gesamtprotokoll. Dieses besteht jeweils aus einer Kopfzeile mit allgemeinen Daten zur Person und zur Bearbeitungsdauer. Anschließend sind die einzelnen Bearbeitungsschritte protokolliert.

P1:	P2:
[[[dieter] 7] [Thu May 27 18:07:28 2004] [18:07:51]] **[0 6 10 300 -28 326 [18 7 30 27] x]** [0 6 10 300 43 195 [18 7 31 10] x] [0 6 10 300 125 53 [18 7 31 65] x] usw.....	[[[dieter] 7] [Thu May 27 18:08:46 2004] [18:09:01]] [0 6 10 300 -24 327 [18 8 49 30] x] [0 6 10 300 124 127 [18 8 49 37] x] [0 6 10 300 -11 34 [18 8 50 2] x] usw.....

Tab. 3.04: Beispieldaten - Gesamtprotokoll im LOGO-Format

In den Datensätzen (Zeilen) sind die, in der folgenden Tabelle dargestellten Einzeldaten gespeichert.

	Vorgabe ab:	Vorgabe bis:	Gesuchte Zahl	X-Koordinate der Zahl	Maus xko	Maus yko	Zeitstempel	Mausstop oder Klick	
[	**0**	**6**	**10**	**300**	**-28**	**326**	**[18 7 30 27]**	**x**	**]**

Tab. 3.05: Beispieldaten - Datensatzformat LOGO-Protokoll

Eine ausführliche Darstellung des Formats findet sich in *Anlage C2*.

Die Daten sind immer noch personenbezogen gekennzeichnet. Deshalb wird beim nächsten Schritt eine Nummerierung (siehe Zeile 2, Tab 3.06) angebracht, die dann für die Anonymisierung genutzt wird.

Anschließend wurden die LOGO-Listen in das Pythontextformat konvertiert (*prg01.py* siehe *Anlage C3*). An den kurzen Beispieldateien stellt sich dieser erste Schritt folgendermaßen dar:

Nr	P1:	P2:
1	[[[dieter] 7] [Thu May 27 18:07:28 2004] [18:07:51]]	[[[dieter] 7] [Thu May 27 18:08:46 2004] [18:09:01]]
2	**001**	**002**
3	0 6 10 300 -28 326 18 7 30 27 x	0 6 10 300 -24 327 18 8 49 30 x
4	0 6 10 300 43 195 18 7 31 10 x	0 6 10 300 124 127 18 8 49 37 x
..	......	....
8	0 6 10 300 328 0 18 7 39 1 x	0 6 10 300 323 -2 18 8 56 62 x
9	0 6 10 300 328 0 18 7 39 23	0 6 10 300 326 -2 18 8 57 11
10	**0 6 10** 300 319 30 18 7 49 92 x	0 6 10 300 200 70 18 8 59 15 x
11	**0 2 10** 300 310 1 18 8 59 3	0 2 10 300 310 1 18 8 59 37

Tab. 3.06: Beispieldaten - Gesamtprotokoll im Pythonformat

Man sieht in den beiden Protokollen, wie Aufgabe 1 mit der Vorgabe von 0 bis 6 und der gesuchten Zahl 10 bearbeitet wird. Zunächst sind nur Mausstopps protokolliert (Zeilen 1..8, mit x am Zeilenende). Am Ende des Protokollls sieht man vermehrt Mausklicks (z.B. Zeile 9). Aufgabe 2 wird noch angefordert (Zeile 11), dann bricht die Bearbeitung ab.

Mit diesen Daten wurde auch eine erste quantitative Auswertung gemacht. Für jedes Kind wurden die Anzahl der bearbeiteten Aufgaben, die Gesamtzeit der Bearbeitung, sowie die Zeit pro Aufgabe und die Anzahl der Klicks pro Aufgabe berechnet und in eine kommaseparierte Textdatei zur weiteren Auswertung mit Statistikprogrammen konvertiert. (*prg02.py* siehe *Anlage C3*).

```
nr, aufgaben, zeit, zeitpa, klickspa
001, 2, 23, 11.0, 3.0
002, 2, 15, 7.0, 1.5
```

Tab. 3.07: Beispieldaten - Protokoll ausgewertet und konvertiert

Um die Daten auch in einem verbreiteten Standardformat zu haben und sie im WWW darstellen zu können, wurde zusätzlich ein xml-Konverter erstellt (*prg04.py* siehe *Anlage C3*).

Aufgabenprotokoll

Im nächsten Schritt wurden die Gesamtprotokolle in Protokolle der Einzelaufgaben aufgesplittet (*prg05.py* siehe *Anlage C3*). Die durchschnittlich bearbeitete Aufgabenzahl lag bei rund 60 pro Mikrowelt und Proband, deshalb wurde die Auswertung auf 100 Aufgaben begrenzt. Damit werden fast alle bearbeiteten Aufgaben erfasst.

P1: z001.txt	P2: z002.txt
nr,xko,yko,zeit,klick,zahl,gesucht,vorgabe	nr,xko,yko,zeit,klick,zahl,gesucht,vorgabe
1,-28,326,0,0,-0.933333333333,10,6	1,-24,327,0,0,-0.8,10,6
2,43,195,83,0,1.43333333333,10,6	2,124,127,7,0,4.13333333333,10,6
3,125,53,138,0,4.16666666667,10,6	3,-11,34,72,0,-0.366666666667,10,6
4,135,-43,158,0,4.5,10,6	4,0,1,133,0,0.0,10,6
5,170,-8,192,0,5.66666666667,10,6	5,119,18,204,0,3.96666666667,10,6
6,182,-6,280,0,6.06666666667,10,6	6,180,5,254,0,6.0,10,6
7,214,-7,335,0,7.13333333333,10,6	7,183,3,314,0,6.1,10,6
8,249,-2,401,0,8.3,10,6	8,353,-14,369,0,11.7666666667,10,6
9,295,-12,456,0,9.83333333333,10,6	9,377,-6,484,0,12.5666666667,10,6
10,308,-17,582,0,10.2666666667,10,6	10,356,-4,539,0,11.8666666667,10,6
11,346,-11,698,1,11.5333333333,10,6	11,340,-4,622,1,11.3333333333,10,6
12,344,-11,813,0,11.4666666667,10,6	12,337,-4,677,0,11.2333333333,10,6
13,328,0,874,0,10.9333333333,10,6	13,323,-2,732,0,10.7666666667,10,6
14,328,0,896,1,10.9333333333,10,6	14,326,-2,781,1,10.8666666667,10,6
15,327,0,972,0,10.9,10,6	15,316,0,836,0,10.5333333333,10,6
16,309,0,1159,1,10.3,10,6	16,310,1,891,0,10.3333333333,10,6
17,289,5,1868,0,9.63333333333,10,6	17,305,1,907,1,10.1666666667,10,6
18,280,0,1878,1,9.33333333333,10,6	18,299,1,907,0,9.96666666667,10,6
19,269,13,1918,1,8.96666666667,10,6	19,280,30,917,0,9.33333333333,10,6
20,319,30,1965,0,10.6333333333,10,6	20,200,70,985,0,6.66666666667,10,6

Tab. 3.08: Beispieldaten - Aufgabenprotokoll

Die Daten sind nun vollständig anonymisiert, nur im Dateinamen könnte über die Datensatznummer eine Zuordnung erfolgen.

In die Protokolle (Tab. 3.08) ist eine Kopfzeile eingefügt, welche die Datenstruktur erklärt. Außerdem sind nun die Schritte durchnummeriert. Zusätzlich wird die aktuelle Zahl am Mauszeiger berechnet.

In der folgenden Tabelle wird eine Einzelzeile (Tab. 3.08; Zeile 16, fett gedruckt) aus Protokoll P1 noch einmal ausführlich mit Erläuterungen dargestellt, um die bei jedem Bearbeitungsschritt erfassten Daten zu zeigen und dadurch die Protokolldaten durchsichtiger zu machen:

nr	xko	yko	zeit	klick	zahl	gesucht	vorgabe
16	**309**	**0**	**1159**	**1**	**10.3**	**10**	**6**
	LOGO-Koordinaten des Mauszeigers		Zeit seit Beginn der Aufgabe: 11.59 sec	1= Klick 0= Stop	Der Mauszeiger steht bei 10.3	Gesuchte Zahl	Vorgabe 0 bis 6

Tab. 3.09: Beispieldaten - Erklärung Datensatz

Die Daten aus der Tabelle werden in der Visualisierung (Abb.3.13) anschaulicher (Konverter *prg06.py* , *prg06k.py* siehe *Anlage C4*).

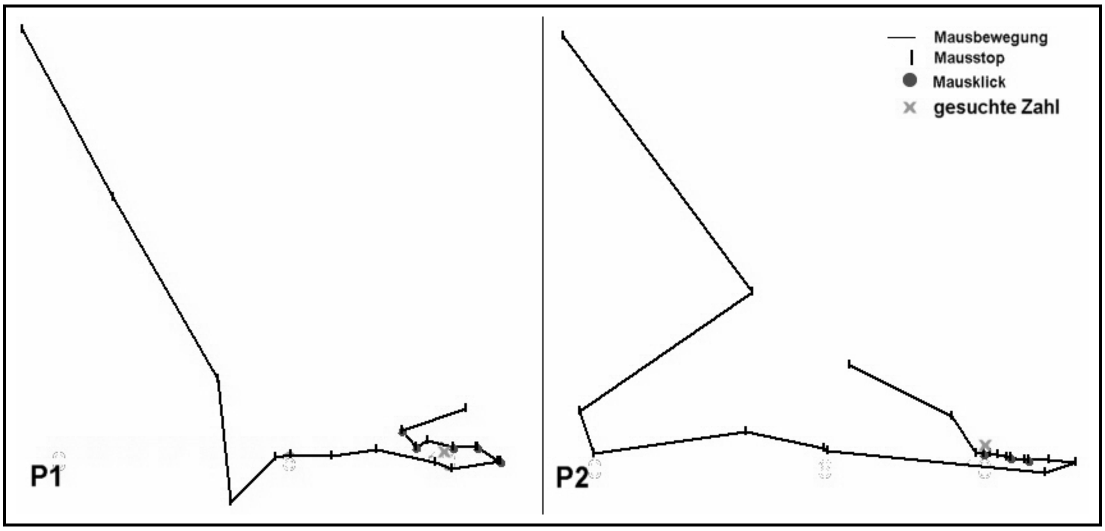


Abb. 3.13: Beispieldaten - Visualisierung des Aufgabenprotokolls

Am Computer präsentieren sich die Daten nicht statisch, wie oben im Bild, sondern sie können im Ablauf betrachtet werden. Die Bearbeitung beginnt jeweils links oben.

Man sieht in der Visualisierung der Daten (Abb. 3.13), dass am Anfang und am Ende noch Daten protokolliert wurden, die für die eigentliche Strategie keine Bedeutung haben. Zunächst wird die Maus in der Nähe des Zahlenstrahls positioniert, dann beginnt die Bearbeitung. Nachdem die Zahl 10 gefunden ist, wird die Maus weiter bewegt und es werden weitere Mausklicks produziert.

Die folgende Grafik (3.14) zeigt fett den zentralen Teil der Bearbeitung, in dem die verwendete Strategie gespeichert ist. Die unwichtigen Teile am Anfang und am Ende sind dünn dargestellt. Zur besseren Orientierung wird ein Zahlenstrahl mit der Vorgabezahl, der gesuchten Zahl und einer Skalierung eingeblendet.

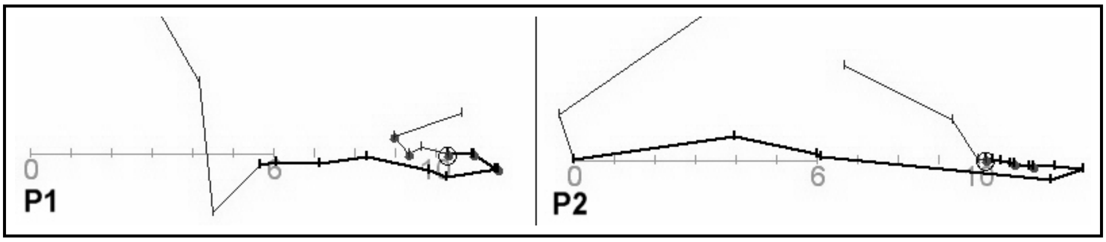


Abb. 3.14: Beispieldaten - Visualisierung des differenzierten Aufgabenprotokolls

Kurzprotokoll

Nachdem die unwichtigen Teile des Protokolls herausgefiltert sind, bleibt der zentrale Teil der Bearbeitung übrig und man erhält das Kurzprotokoll (Konverter *prg07.py* und Filter *prg08.py* siehe *Anlage C4*).

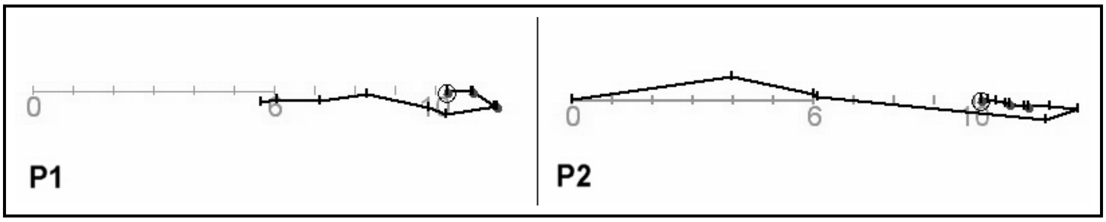


Abb. 3.15: Beispieldaten - Visualisierung des Kurzprotokolls

Man sieht im Kurzprotokoll aber immer noch Positionierungsfragmente z.B. in der Nähe der Zahl 6 (P1), wo zwei Mausstopps eng nebeneinander liegen oder bei den Mausklicks in der Nähe von 10 (P2), wo die Maus vor oder nach dem Klick etwas verschoben wurde. Diese Fragmente haben für die Strategie keine Bedeutung und werden deshalb in einem letzen Schritt herausgefiltert. Es entsteht das Arbeitsprotokoll.

Arbeitsprotokoll

Das Arbeitsprotokoll bildet die Grundlage für alle weiteren qualitativen Auswertungen (Filter *prg11.py* siehe *Anlage C4*).

Im beiden Bildern, P1 und P2 (s.u.), kann man nun die Strategie relativ klar erkennen.

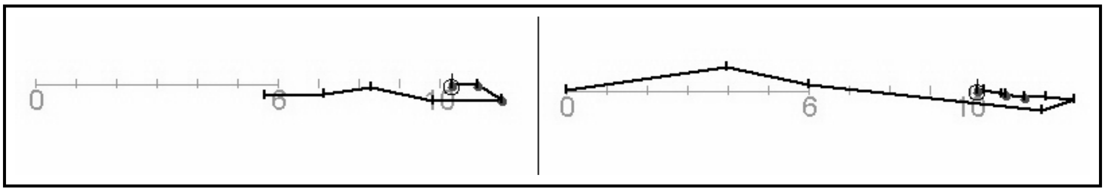


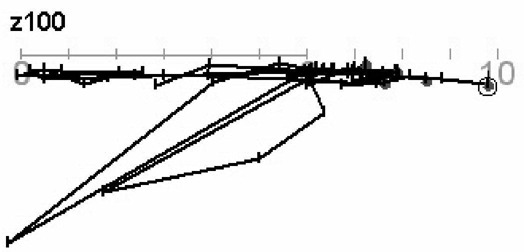
Abb. 3.16: Beispieldaten - Visualisierung des Arbeitsprotokolls

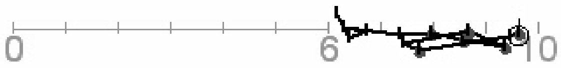
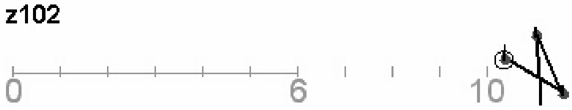
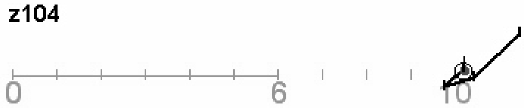
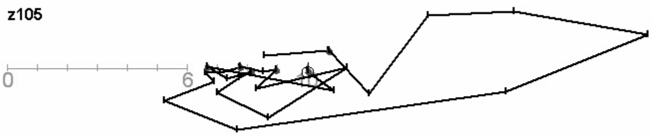
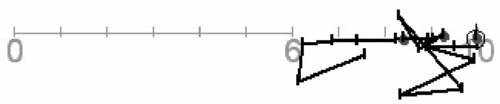
P1: Das Kind zählt, beginnend bei 6, in Einerschritten ...7, 8, 9, 10 und klickt. Da die Schritte zu groß gewählt waren, muss nun mit weiteren Klicks die Zahl 10 gesucht werden. Das Kind sucht rückwärts Richtung 6 und wendet damit die richtige Suchstrategie an. Es findet die Zahl 10 nach zwei weiteren Klicks.

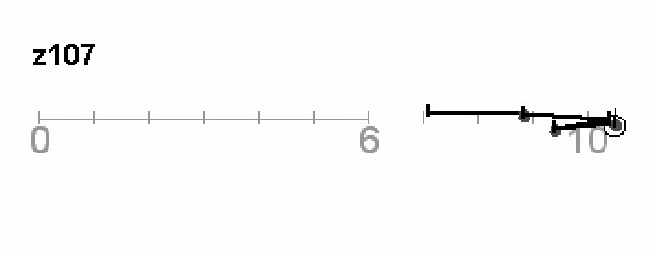
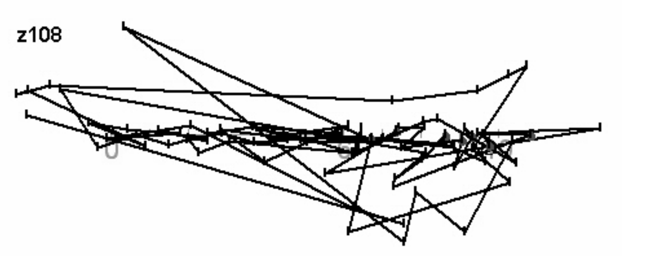
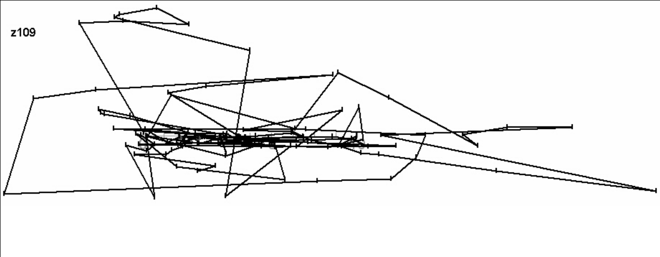
P2: Das Kind orientiert sich an 0, geht vorwärts zur Zahl 6, diese wird verdoppelt, um dann zwei Schritte zurückzugehen und zu klicken. Hier wurde die Schrittweite zu kurz gewählt, deshalb muss die Zahl 10 gesucht werden. Ob 6 wirklich verdoppelt wurde, lässt sich aus dem Protokoll nicht eindeutig ablesen. Das Kind könnte auch eine direkte Strategie zu 10 gewählt und sich verschätzt haben. Sicher feststellen kann man jedoch, dass keine Zählstrategie vorliegt, der Zahlenstrahl wird nicht aufgebaut, sondern es wird das fertige mentale Bild genutzt, um zur Zahl 10 zu kommen.

Zehn reale Fälle aus der Untersuchung

Um einen kleinen Einblick in die unterschiedlichen Bearbeitungen der Kinder zu geben und damit hier nicht der falsche Eindruck entsteht, als ob die Protokolldaten immer so eindeutig wären, wie in den beiden Beispielen P1 und P2, wurden im folgenden Bild noch einmal die Arbeitsprotokolle für Aufgabe 1 (Vorgabe 0 bis 6; gesuchte Zahl 10) von zehn beliebigen Kindern (z100 .. z109) visualisiert. Die Arbeitsprotokolle wurden im Ablauf der Visualisierung bewertet, um dadurch per Augenschein eine Strategie zuweisen zu können. Bei manchen Protokollen (z.B. Z100, z108, ...) musste der Ablauf mehrfach beobachtet werden, bevor eine Aussage über die Strategie möglich war.

Visualisierung des Arbeitsprotokolls	Beobachtete Strategie(n)
	gefunden: Zählen ab 6 in Einerschritten ... Abbruch Zählen ab 1 in Einerschritten

<table>
<tr><td>z101
</td><td>gefunden:
Zählen ab 6 in Einerschritten</td></tr>
<tr><td>z102
</td><td>gefunden:
direkt zu 10</td></tr>
<tr><td>z103
</td><td>gefunden:
direkt zu 10, dann Suche in die falsche Richtung</td></tr>
<tr><td>z104
</td><td>gefunden:
direkt zu 10</td></tr>
<tr><td></td><td>gefunden:
direkt zu 10
... Abbruch
Zählen ab 6 in Einerschritten</td></tr>
<tr><td>z106
</td><td>gefunden:
Zählen ab 6 in Einerschritten</td></tr>
</table>

	gefunden: Zählen ab 6 in Zweierschritten
	gefunden: Zählen ab 0 in Einerschritten ... Abbruch ... Insgesamt 3 Versuche
	Nicht gefunden: Suche ohne Orientierung 2 Mausklicks zwischen 0 und 6, sonst nur Mausbewegung

Tab. 3.10: Visualisierung - Strategien verschiedener Kinder

Bei vielen Beispielen in der Tabelle gelingt es auf den ersten Blick, die Strategien der Kinder zu benennen. Bei den weniger eindeutigen Bildern (z.B. z105, z108, z109) gelingt die Strategieerkennung dann gut, wenn man die animierte Visualisierung am Computer benutzt, also das Bild in der Entstehung beobachtet. Dabei werden Strategieabbrüche und Strategiewechsel besonders deutlich.

3.3.3 Mustererkennung

Im folgenden Unterkapitel wird dargestellt, wie die Arbeitsprotokolle weiterverarbeitet werden, um dann einzelne Strategien automatisch zu erkennen. In einem kurzen Exkurs werden zunächst die üblichen statistischen Verfahren betrachtet, um dann die im CEKA-Projekt entwickelte Strategiesuche in den vorliegenden Daten darzustellen. Die Güte dieser Filterprogramme wird an Vergleichsdaten aus der Auswertung mit ‘Hand und Auge’ gemessen. Die folgende Grafik zeigt die einzelnen Schritte der Mustererkennung.

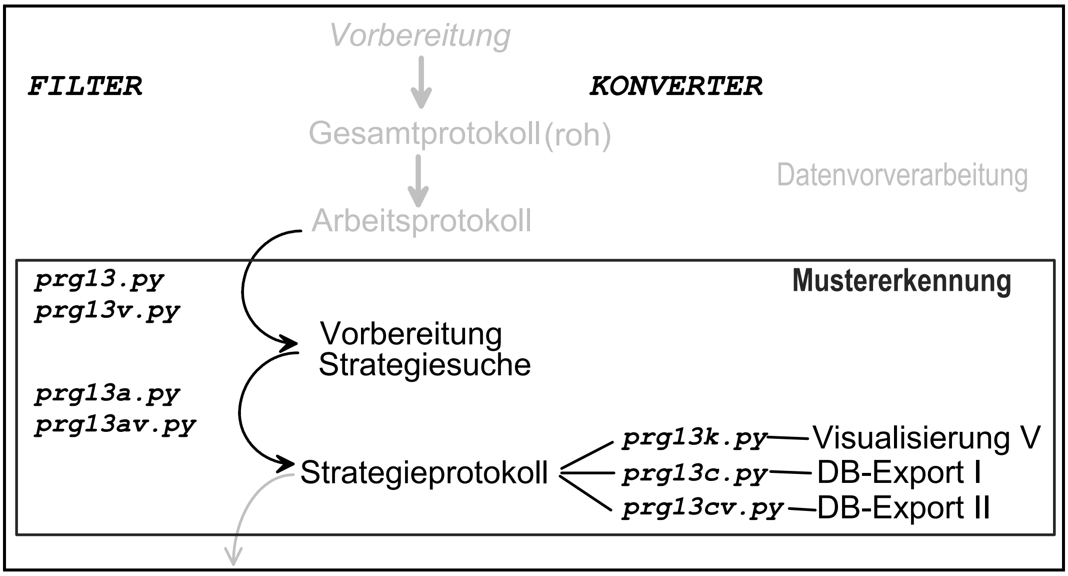


Abb. 3.17: Übersicht - Mustererkennung in den Daten

Zunächst soll jedoch kurz dargestellt werden, welche anderen statistischen Verfahren möglicherweise zur Strategieerkennung eingesetzt werden könnten.

Verfahren der Mustererkennung - Exkurs

Es gibt heutzutage unzählige, z. T. sehr aufwändige Methoden um Strukturen in Daten zu erkennen, wie folgendes Zitat zeigt: *'Zur automatischen Analyse von Daten werden unter anderem Methoden der Statistik, der explorativen Statisktik, der künstlichen Intelligenz, der Mustererkennung, der Clusteranalyse und der neuronalen Netze eingesetzt.'* [Runkler 2000, 53]. Die meisten dieser Methoden sind aber für das hier vorliegende Problem wenig geeignet oder zu aufwändig, wie z.B. die letztgenannten Verfahren, die neuronale Netze einsetzen.

Statistische Verfahren - Clusterananlyse und Faktorenanalyse

Die Clusteranalyse ist das typische Analyseverfahren um *'gegebene Fälle anhand von gegebenen Variablen in Gruppen (Cluster) einzuteilen, so dass Fälle eines Clusters bezüglich dieser Variablen ähnliche Werte und Fälle aus verschiedenen Clustern möglichst unähnliche Variablenwerte aufweisen.'* [Zöfel 2002, 187]. In dieser Beschreibung werden sofort auch die Grenzen des Verfahrens deutlich. Die Fälle müssen durch Variablen, hier die Kennwerte der Strategien, beschreibbar sein. Man müsste aus den vorhandenen Protokolldaten Werte für einzelne Variablen berechnen können, welche die Strategien sicher beschreiben, um dann auf dieser Basis eine Clusteranlyse durchführen zu können. Die Arbeitsprotokolle in der vorliegenden Form sind jedoch ungeeignet, da alle unterschiedlich lang sind, aber für die Clusteranalyse Vektoren gleicher Länge vorausgesetzt werden. Außerdem verlangt die Clusteranalyse, dass man Ausreißer in den Daten vorher ausfiltert. Auch dazu müsste man die Protokolle anhand von Kriterien durchsuchen, um diese Ausreißer zu finden. Selbst wenn man Variablen wie Gesamtbearbeitungszeit, Schrittzahl bis zur Lösung oder Klickzahl usw. verwenden würde, hätte man keine sicheren Parameter um verschiedene Strategien zu beschreiben. Diese vorgenannten Variablen variieren von Aufgabe zu Aufgabe, unabhängig von der Strategie, relativ stark.

Dieselben Argumente gelten natürlich auch für die Faktorenanalyse, wo man ja Variablen anhand von Fällen zu Faktoren, hier Strategien, zusammenfasst. Auch hierzu müsste man einheitliche Daten haben.

Eigenes Verfahren zur Strategieerkennung

Da die Standardverfahren zur Datenanalyse wie oben beschrieben untauglich oder zu aufwändig sind, wird hier versucht, mit einem relativ einfachen Ansatz die Daten zu strukturieren, um danach eine Kategorisierung (Strategieerkennung) durchführen zu können.

Die Arbeitsprotokolle werden in verschiedenen Abschnitten auf die zielführende Strategie untersucht, um in den Arbeitsprotokollen schließlich Strategien automatisch mit Hilfe des Computers zu erkennen. Hierbei durchsucht das Programm (*prg13a.py* , *Anlage C4*) das Arbeitsprotokoll rückwärts, ab dem Zeitpunkt, zu dem der Proband die Zahl gefunden oder abgebrochen hat. Diese Filterung geht dann durch das Protokoll rückwärts bis zur Vorgabezahl oder bis Null. Hierzu wird der gesamte Bereich (Null bis gesuchte Zahl, bzw. Vorgabe) in drei Teilbereiche unterteilt, um dann entscheiden zu können, ob ab Vorgabe, ab Null oder aber direkt bei der Zahl, mit einer gewissen Toleranz, Anzahl von Schritten, Klicks usw. gesucht wurde. Der Filter orientiert sich also an den Kriterien, die man auch bei der 'Hand und Auge'-Auswertung anlegen würde. Danach wird jeweils eine der folgenden Strategien zugeordnet:

Strategie 3: Suche direkt

Strategie 2: Suche ab der Vorgabezahl

Strategie 1: Suche ab 0

Falls keine der genannten Strategien zutrifft:

Strategie 0: keine Strategie erkennbar

Die Beispieldatensätze P1 und P2 zeigen die Schritte bis zu der Strategieerkennung wie oben beschrieben:

P1:	P2:
	nr,xko,yko,zeit,klick,zahl,gesucht,vorgabe,gefunden
nr,xko,yko,zeit,klick,zahl,gesucht,vorgabe,gefunden	17,305,1,907,1,10.1666666667,10,6
16,309,0,1159,1,10.3,10,6	16,310,1,891,0,10.3333333333,10,6
14,328,0,896,1,10.9333333333,10,6	14,326,-2,781,1,10.8666666667,10,6
13,328,0,874,0,10.9333333333,10,6	13,323,-2,732,0,10.7666666667,10,6
11,346,-11,698,1,11.5333333333,10,6	11,340,-4,622,1,11.3333333333,10,6
9,295,-12,456,0,9.83333333333,10,6	10,356,-4,539,0,11.8666666667,10,6
8,249,-2,401,0,8.3,10,6	9,377,-6,484,0,12.5666666667,10,6
7,214,-7,335,0,7.13333333333,10,6	8,353,-14,369,0,11.7666666667,10,6
5,170,-8,192,0,5.66666666667,10,6	6,180,5,254,0,6.0,10,6
X: , vorgabe , k10.3 , k10.9 , 10.9 , k11.5 , 9.8 , 8.3 , 7.1 , 5.7 ,	X: , vorgabe , k10.2 , 10.3 , k10.9 , 10.8 , k11.3 , 11.9 , 12.6 , 11.8 , 6.0 , 4.0 , 0.0 ,

Tab. 3.11: Beispieldaten - Protokolle mit Strategie

Im Protokoll P1 sieht man, wie die Nummerierung nun von 16 bis 5 rückwärts läuft und dass in der letzten Protokollzeile die erkannte Strategie, sowie die berechneten Zahlenwerte der Bearbeitung stehen. Ein 'k' bei der Zahl bedeutet, dass hier geklickt wurde. Mit diesen erkannten Strategien kann nun weitergearbeitet werden.

Die Visualisierung der Strategien unterscheidet sich nur minimal von den Bildern der Arbeitsprotokolle (Abb. 3.16). Es wird nur zusätzlich noch die gefundene zielführende Strategie dargestellt und nicht die ganze im Arbeitsprotokoll aufgezeichnete Bearbeitung, bei der eventuell mehrere Strategien angewandt wurden.

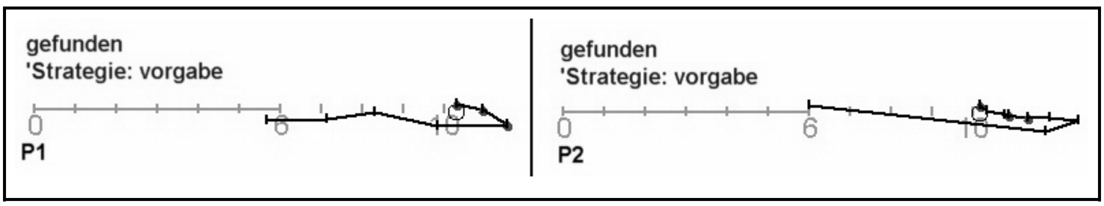


Abb. 3.18: Beispieldaten - Visualisierung der Strategien

Für beide Beispielprotokolle wurde die Strategie *'ab Vorgabe'* erkannt, es wird keine Unterscheidung in '*Zählstrategie ab Vorgabe*' und '*operative Strategie ab*

Vorgabe' gemacht. Diese Ausdifferenzierung müsste ein weiterer Filter in einem nächsten Verarbeitungsschritt machen, indem man die Protokolle z. B. anhand der Schrittzahl zwischen Vorgabezahl und gesuchter Zahl unterscheidet.

Die Strategien pro Aufgabe und Proband können über Konverter wieder in einer Exportdatei für die statistische Auswertung gesammelt werden.

nr	richtig	strategie	zeit	maxzahl	maxd	sumkzahl	klicksg	schritte	klicks
001	1	2	9	1,5	1,2	10,9	3	5	3
002	1	2	6	1,3	1,1	10,8	3	6	3

Tab. 3.12: Beispieldaten - Strategien ausgewertet und konvertiert

Für die Strategien aus Tabelle 3.10 ergeben sich nach dem Durchlauf des Filters folgende Kategorien:

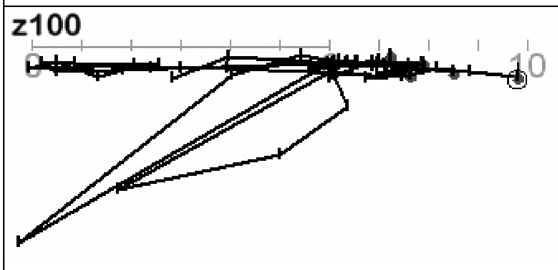
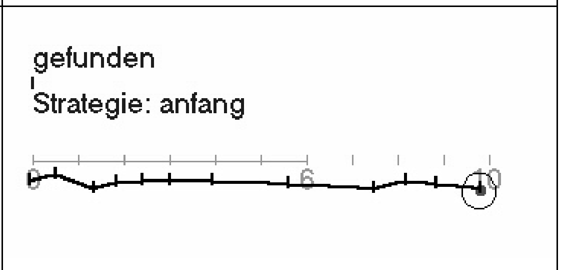
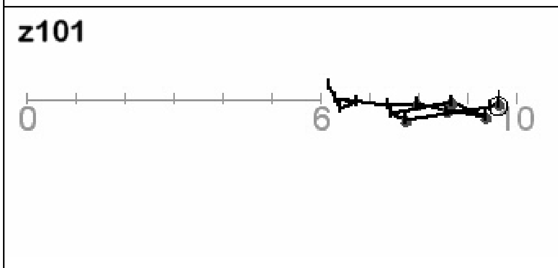
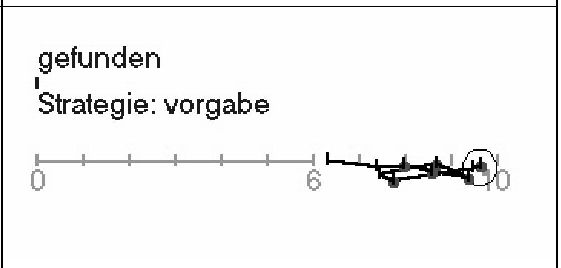
Strategie 0: sonstige oder keine (z102, z103, z105)

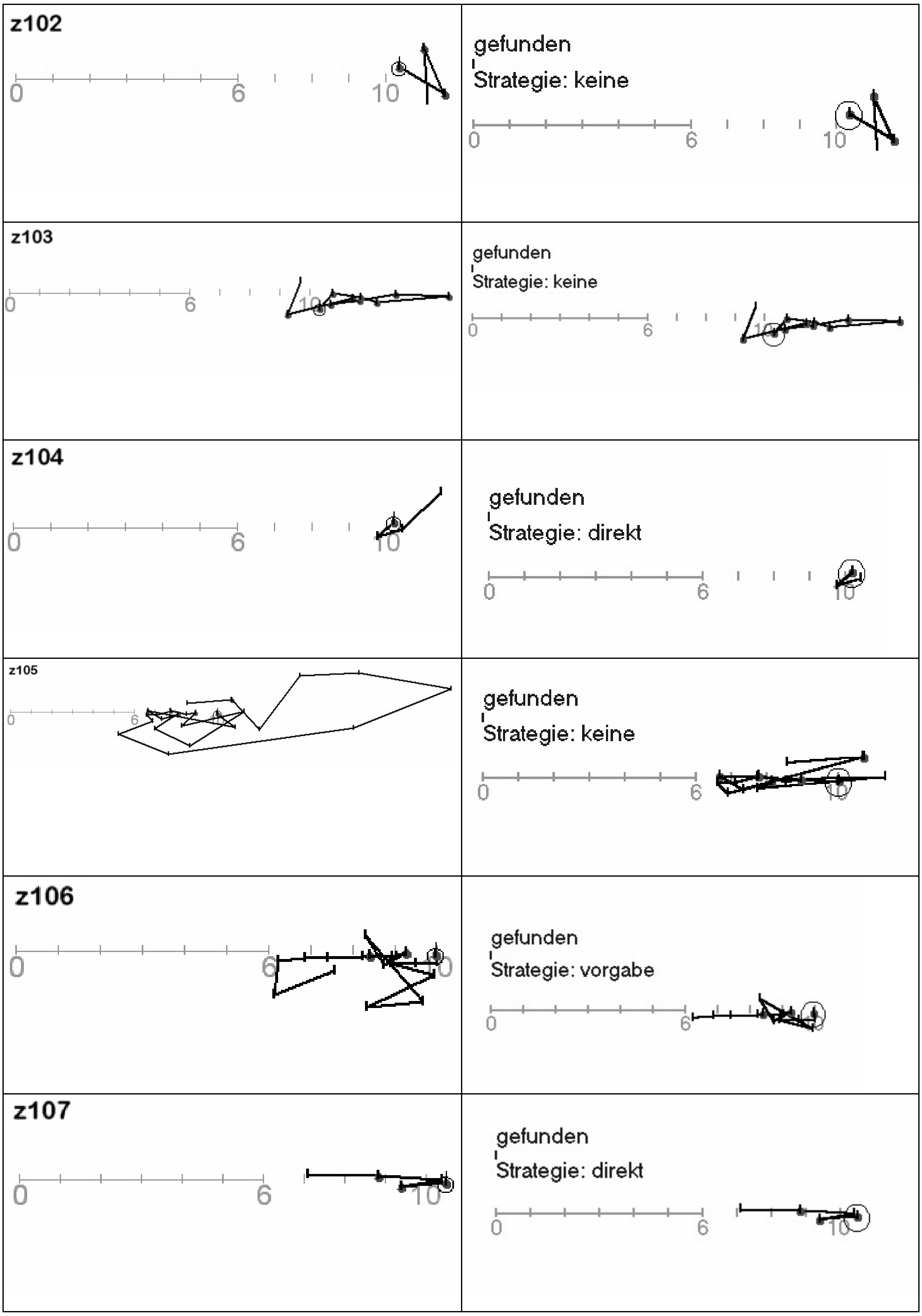
Strategie 1: ab Null (z100, z108, z109)

Strategie 2: ab Vorgabe (z101, z106)

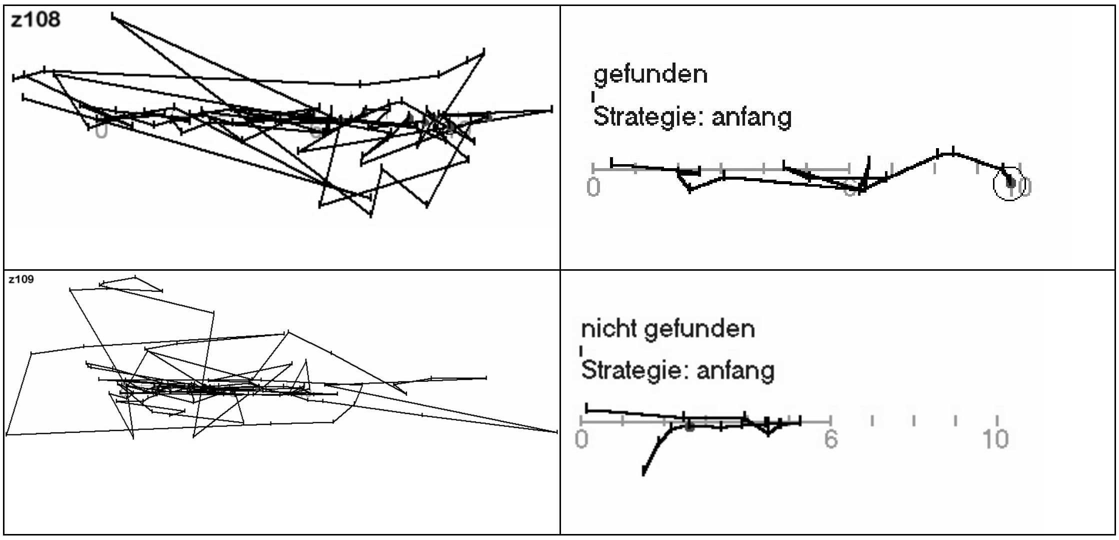
Strategie 3: direkt (z104, z107)

Der Übergang zur erkannten Strategie wird durch die Gegenüberstellung der Visualisierungen in Tabelle 3.10 und der erkannten Strategien in der folgenden Tabelle deutlich.

<table>
<tr><th>Arbeitsprotokoll (vgl. Tab. 3.10)</th><th>Visualisierung zielführende Strategie</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>



z102
0 6 10
gefunden
Strategie: keine
0 6 10
z103
0 6 10
gefunden
Strategie: keine
0 6 10
z104
0 6 10
gefunden
Strategie: direkt
0 6 10
z105
0 6 10
gefunden
Strategie: keine
0 6 10
z106
0 6 10
gefunden
Strategie: vorgabe
0 6 10
z107
0 6 10
gefunden
Strategie: direkt
0 6 10



Tab. 3.13: Visualisierung - Filter zur Strategieerkennung

Der Vergleich mit Tabelle 3.10 zeigt, dass klar erkennbare Strategien durch den Filter auch erkannt werden und dass eine falsche Strategiezuweisung selten vorkommt. Unklare Strategien werden eher als ‘keine’ markiert.

In Tabelle 3.14 sind die erkannten Strategien kurz dargestellt:

Proband	Computerauswertung(3.11)	‘Hand und Auge’ (3.10)
z100	Anfang (Strategie 1)	... Zählen ab 1 in Einerschritten
z101	Vorgabe (Strategie 2)	... Zählen ab 6 in Einerschritten
z102	*Keine (Strategie 0)*	*... direkt zu 10*
z103	*Keine (Strategie 0)*	*... direkt zu 10, dann Suche in die falsche Richtung*
z104	Direkt (Strategie 3)	... direkt zu 10
z105	*Keine (Strategie 0)*	*... Zählen ab 6 in Einerschritten*
z106	Vorgabe (Strategie 2)	... Zählen ab 6 in Einerschritten
z107	*Direkt (Strategie 3)*	*... Zählen ab 6 in Zweierschritten*
z108	Anfang (Strategie 1)	... Zählen ab 0 in Einerschritten
z109	*Anfang (Strategie 1)*	*Nicht gefunden:* *Suche ohne Orientierung* *2 Mausklicks zwischen 0 und 6,*

Tab. 3.14: Strategien - Vergleich von Beispielaufgaben Computer/Hand

Der Computerauswertung sind zum Vergleich die, bei der Auswertung mit 'Hand und Auge' erkannten Strategien gegenübergestellt. Ein Blick in Tabelle 3.14 bestätigt die vorher gemachten Aussagen. Wenn man von Proband z109 absieht, der keine Lösung gefunden hat, dann ist nur bei z107 die Strategie falsch erkannt worden. Statt *‘Zählen ab 6 in Zweierschritten’* wird *‘direkt zu 10’* erkannt. Dies resultiert daher, dass zwischen 6 und 10 ein einziger Schritt gemacht wird. Die beiden Strategien *'Zählen in Zweierschritten'* und *'direkt'* sind in diesem Fall zu ähnlich.

3.3.4 Erkennungsgüte einzelner Strategien

Vergleich Computerauswertung - Hand und Auge Auswertung

Um eine Vergleichsgrundlage für die Güte der hier entwickelten und eingesetzten Werkzeuge zur Kategorisierung zu haben, wurden vier Aufgaben (Aufg01, Aufg10, Aufg12, Aufg22 ...) wie im vorigen Abschnitt beschrieben 'per Augenschein' ausgewertet, indem die ca. 650 Ablaufprotokolle der Einzelaufgaben visualisiert und dann kategorisiert wurden. Die vier Aufgaben wurden ausgewählt, weil die Auswertung der Expertenstrategien zeigt, dass alle vier Aufgaben die Nutzung operativer Strategien in unterschiedlichem Umfang nahelegen (vgl. 3.2.7). Da den Kindern in der Einführungsstunde die Anwendung von Zählstrategien als Grundlage vermittelt wurde, können die vier Aufgaben außerdem ein erstes Indiz dafür sein, ob sich Kinder von diesen Grundstrategien lösen und auch operative Strategien anwenden werden. Für die Auswertung wurden wieder folgende Kategorien verwendet:

0 - keine Strategie erkennbar

1 - Zählstrategie (schrittweise Vorwärtsgehen) ab 0

2 - Zählstrategie (schrittweise Vorwärtsgehen) ab der Vorgabezahl

3 - direkt zur Lösung oder operative Strategie

Bei der Lösung der einzelnen Aufgaben nutzen manche Kinder mehrmals dieselbe Strategie oder verschiedene Strategien. Sie beginnen z.B. mit der Strategie *'direkt zur Lösung'* und wechseln dann bei Misserfolg zur Strategie *'schrittweise Vorwärtsgehen ab der Vorgabezahl'*. Die letztgenannte Strategie wird dann mehrmals angewendet und zwar solange, bis man zum Erfolg kommt oder aber die Strategie wird zwischendurch nochmals gewechselt. Diese Mehrfachanwendung einer Strategie und der Wechsel zwischen verschiedenen Strategien wurden hier für die vergleichende Analyse nicht ausgewertet. Es wurde pro Bearbeitung nur eine Strategie, nämlich die letzte, zielführende Strategie erhoben, da die Computerauswertung so programmiert wurde. Im Folgenden werden die vier Aufgaben kurz charakterisiert und es werden die Ergebnisse der Computer- vs. Handauswertung dargestellt. Da es hier nur darum geht, die Güte der Computerauswertung gegen die Handauswertung darzustellen und zu messen, werden weitere Zusammenhänge in den Daten der einzelnen Aufgaben nicht hier, sondern in Kapitel 4 präsentiert.

Aufg01: Vorgabe 0 ... 6 ; gesucht: 10

Die Aufgabe legt sowohl die Lösung durch Zählstrategien wie auch durch operative Strategien nahe (vgl. Beispielprotokolle P1, P2, Tab. 3.03 ff.). Die Experten wählen je zur Hälfte Zählstrategien und operative Strategien (vgl. Anlagen: Abb. 7.03).

Der Vergleich der Häufigkeiten zeigt, dass das Computerprogramm eher eine Strategie zuordnet. Der Anteil nicht erkannter Strategien ist ca. ein Drittel geringer als bei der Handauswertung.

Aufg01		Computerauswertung		Handauswertung	
		Anzahl	Prozent	Anzahl	Prozent
n=184 richtig: 165 falsch: 19	Strategie 0	37	20,1	62	33,7
	Strategie 1	31	16,8	18	9,8
	Strategie 2	80	43,5	71	38,6
	Strategie 3	36	19,6	33	17,9
	Summe	184	100,0	184	100,0

Tab. 3.15: Aufg01 - Strategien (Häufigkeit)

Bei den Strategien 2 (‘*Zählen ab Vorgabe*’) und 3 (‘*direkt oder operativ*’) stimmen die Anzahlen überraschend gut überein.

Bei dieser und allen folgenden Auswertungen wurden immer Rangkorrelationskoeffizienten nach Spearman berechnet, da man davon ausgehen kann, dass die Strategien 0 (keine Strategie) bis 3 (direkt) eine Rangfolge beschreiben, also ordinalskaliert sind. Die Untersuchung der Zusammenhänge zwischen den Variablen *Strategien der Computerauswertung* und *Strategien der Handauswertung* ergibt eine signifikante Korrelation (r=0,658 / p<0,001), wenn man bei dieser Aufgabe alle Strategien berücksichtigt. Falls man die nicht gelösten Aufgaben (~10%) herausrechnet, werden die Werte sogar noch etwas bessser (r=0,700 / p<0,001). Man kann auch nur die Strategien 1 bis 3 und die richtig gelösten Aufgaben berücksichtigen, also die nicht erkannten Strategien (Strategie 0) weglassen. Dann ergibt sich ebenfalls eine signifikante Korrelation (r=0,879 / p< 0,001). Bei Berücksichtigung aller Schülerinnen und Schüler, unter Weglassen der Strategie 0 ergibt sich ein Wert von r=0,871 / p<0,001. Auch die Kinder, die nicht zur Lösung kommen, versuchen natürlich unterschiedliche Strategien, die hier erkannt werden.

Aufg10: Vorgabe 0 ... 3 ; gesucht: 7

Die Aufgabe sollte noch stärker durch operative Strategien, statt durch Zählstrategien gelöst werden, da das Verdoppeln der Zahl 3 zu 6 fast zur Lösung führt. Auch bei den Experten ergibt sich ein Verhältnis von 4 : 1 zugunsten operativer Strategien. Die Gegenüberstellung Computer- vs. Handauswertung zeigt nicht diese klare Präferenz.

Aufg10		Computerauswertung		Handauswertung	
		Anzahl	Prozent	Anzahl	Prozent
n=172 richtig: 135 falsch: 37	Strategie 0	44	25,6	67	39,0
	Strategie 1	17	9,9	5	2,9
	Strategie 2	65	37,8	62	36,0
	Strategie 3	46	26,7	38	22,1
	Summe	172	100,0	172	100,0

Tab. 3.16: Aufg10 - Strategien (Häufigkeit)

Die beiden Auswertungen bei Aufgabe 10 stimmen bei allen Strategien relativ gut überein. Diese gute Übereinstimmung zeigt sich in der folgenden Tabelle auch in den hohen Korrelationen zwischen Computerauswertung und Handauswertung.

Aufg10: Strategien d. Computeraus-wertung vs. Handauswertung	Korrelationen r	Korrelationen p
Alle Strategien	0,772	<0,001
Alle Strategien und richtige Lösung	0,809	<0,001
Strategien 1..3	0,859	<0,001
Strategien 1..3 und richtige Lösung	0,859	<0,001

Tab. 3.17: Aufg10 - Strategien (Korrelationen n. Spearman)

Aufg12: Vorgabe 0 ... 10 ; gesucht: 5

Fast jedes Kind weiß, wenn es in die Schule kommt, dass es zwei Hände mit zusammen 10 Fingern hat und dass 5 Finger die Hälfte, also eine Hand sind. Zu erwarten wäre deshalb eine operative Lösung vor dem Hintergrund dieses Wissens über den eigenen Körper. Genauso entscheiden auch die Experten, die zu 100% diese Lösung favorisieren.

Aufg12		Computerauswertung		Handauswertung	
		Anzahl	Prozent	Anzahl	Prozent
n=169 richtig: 135 falsch: 34	Strategie 0	57	33,7	67	39,6
	Strategie 1	3	1,8	34	20,1
	Strategie 2	12	7,1	7	4,1
	Strategie 3	97	57,4	61	36,1
	Summe	169	100,0	169	100,0

Tab. 3.18: Aufg12 - Strategien (Häufigkeit)

Der Vergleich der Auswertungen (Computer vs. Hand) bei dieser Aufgabe zeigt allerdings relativ große Unterschiede bei den Häufigkeiten für die Strategiewahl der Kinder.

Besonders die automatische Erkennung von Strategie 1 ('Schrittweise ab 0') zeigt eine deutliche Differenz zur Handauswertung. Bei der Berechnung der Korrelationen ergibt sich dann auch ein sehr differenziertes Bild. Die Strategien 2 und 3 stimmen gut überein, wenn man Strategie 1 dazunimmt, dann nimmte die Korrelation stark ab.

Aufg12: Strategien d. Computerauswertung vs. Handauswertung	Korrelationen	
	r	p
Alle Strategien	0,740	<0,001
Alle Strategien und richtige Lösung	0,695	<0,001
Strategien 1..3	0,250	0,015
Strategien 1..3 und richtige Lösung	0,190	0,071
Strategien 2..3	0,905	<0,001
Strategien 2..3 und richtige Lösung	0,859	<0,001

Tab. 3.19: Aufg12 - Strategien (Korrelationen n. Spearman)

Aufg22: Vorgabe 0 ... 6 ; gesucht: 4

Die Aufgabe kann sowohl durch Vorwärtszählen ab 0, als auch durch Rückwärtszählen ab 6 oder auch dadurch gelöst werden, dass man 6 fast halbiert. Die Experten entscheiden sich hier, wie bei Aufgabe 01, jeweils zu gleichen Teilen für Zählstrategien und operative Strategien.

Die Gegenüberstellung Computer- vs. Handauswertung zeigt ein ähnliches Bild, wobei die Computerauswertung, im Gegensatz zur Handauswertung, häufiger eine Direktstrategie erkennt.

Aufg22		Computerauswertung		Handauswertung	
		Anzahl	Prozent	Anzahl	Prozent
n=130 richtig: 113 falsch: 17	Strategie 0	46	35,4	64	49,2
	Strategie 1	3	2,3	8	6,2
	Strategie 2	19	14,6	18	13,8
	Strategie 3	62	47,7	40	30,8
	Summe	130	100,0	130	100,0

Tab. 3.20: Aufg22 - Strategien (Häufigkeit)

Die Häufigkeiten stimmen relativ gut überein. Die Zusammenhänge zwischen den Variablen *Strategien der Computerauswertung* und *Strategien der Handauswertung* zeigen überwiegend mittlere Korrelationen.

Aufg22: Strategien d. Computerauswertung vs. Handauswertung	Korrelationen	
	r	p
Alle Strategien	0,679	<0,001
Alle Strategien und richtige Lösung	0,660	<0,001
Strategien 1..3	0,640	<0,001
Strategien 1..3 und richtige Lösung	0,632	<0,001
Strategien 2..3	0,863	<0,001
Strategien 2..3 und richtige Lösung	0,869	<0,001

Tab. 3.21: Aufg22 - Strategien (Korrelationen n. Spearman)

3.4 Zusammenfassung

Der Prozess der Aufbereitung von Protokolldaten aus den Computermikrowelten bis hin zur automatischen Erkennung von Strategien stellt sich im Rückblick als stark strukturiert, aus der Anwendung vieler verschiedener Werkzeuge bestehend und insgesamt sehr aufwändig dar. Dabei muss aber berücksichtigt werden, dass es sich hier um eine Entwicklungsarbeit handelt und dass nun, nachdem die Einzelschritte festliegen, der Gesamtprozess natürlich in einem einzigen Auswertungsprogramm abgebildet werden könnte. Visualisierungen zur Kontrolle der einzelnen Verarbeitungsschritte sind nun nicht mehr nötig, können aber auch in das Auswertungsprogramm integriert werden. Außerdem könnten nun die Protokolldaten nahezu beliebig grosser Populationen mit relativ geringem Mehraufwand verarbeitet werden. Der Mehraufwand fällt nur in der ersten Auswertungsphase an, wo die Daten kontrolliert und eventuell korrigiert werden müssen. Diese unvollständigen oder fehlerhaften Daten könnte man aber auch einfach automatisch aussortieren, wenn die Datenmenge groß genug ist.

Obwohl der letzte Filter für die Erkennung einzelner Strategien einfach konstruiert war, sind die Erkennungsraten der Computerauswertung für die Strategien 1 bis 3 , die in der Summe für die vier Aufgaben zwischen 65% und 80% liegen, sowie auch die Güte der Computerauswertung sicher ausreichend, um größere Datenmengen automatisch auszuwerten und dabei Tendenzen bei der Wahl einzelner Strategien erkennen zu können. Noch bessere Erkennungsraten könnten wahrscheinlich durch vorherige Kategorisierung der Aufgaben und anschließende Anwendung von spezialisierten Filtern erreicht werden. Auch eine stärkere Beachtung der Randbedingungen bei der Arbeit in den Mikrowelten könnte die Erkennungsrate und -güte weiter verbessern. Kinder orientieren sich nicht nur an den Vorgabezahlen sondern auch an den schon gesetzten Mausklicks, die nicht zum Ziel führten. Dies wurde bei der hier beschriebenen Auswertung nicht berücksichtigt.

Für die Auswertung individueller Strategien einzelner Kinder ist sicher, neben der automatisierten Auswertung durch das Computersystem, die eine erste schnelle Orientierung liefern kann, eine Auswertung mit 'Hand und Auge', unterstützt durch die animierte Visualiserung am Computer, wie in Tab. 3.10 dargestellt, besser geeignet.

4 Ergebnisse der einzelnen Untersuchungen

Der Umfang der erhobenen Daten macht es nahezu unmöglich, alle Daten bis ins Einzelne ausführlich darzustellen. Deshalb werden nur die, für das Projekt wichtigen Daten in sehr komprimierter Form dargestellt. Ergänzt wird diese Gesamtdarstellung durch die tiefer gehende Analyse einzelner interessanter Ergebnisse aus den Teilaufgaben.

Bei der Darstellung der Ergebnisse wird versucht, immer nach demselben Schema vorzugehen. Zunächst werden die zusammengefassten Daten dargestellt und beschrieben. Die Daten werden deskriptiv (Häufigkeiten, Mittelwerte, Standardabweichungen, ...) und mit ihrer Verteilung dargestellt. Anschließend werden einzelne Zusammenhänge innerhalb der Teiluntersuchungen durch Rangkorrelationskoeffizienten (n. Spearman) beschrieben. Zusammenhänge zwischen den Teiluntersuchungen werden gesondert in Kapitel 5 dargestellt. Falls nötig, werden Aussagen zum methodischen Vorgehen gemacht. Wenn es vergleichbare Untersuchungen gibt, werden die Daten aus CEKA diesen Vergleichsdaten gegenübergestellt. Danach werden Zusammenhänge zwischen den Daten der Einzeluntersuchungen dargestellt und diskutiert. Am Ende werden die wichtigsten Ergebnisse jeweils noch kurz zusammengefasst.

Geschlechtsspezifische Effekte, die in den verschiedenen Untersuchungen auch beobachtet werden konnten, werden in einem eigenen Unterkapitel (5.3) gesondert präsentiert und diskutiert.

4.1 Eingangsuntersuchung

Die Eingangsuntersuchung wird in drei Teilen dargestellt:

- Persönliche Daten, Computerausstattung, Tätigkeiten am Computer und Kenntnisse
- Mathematischer Eingangstest
  (Aufgaben des Gruppen- und Einzeltests, Aufgabengruppen)
- Ausgewählte Teilaufgaben
  (Zählen G13, G14, E28, E29, E30, E31, E32, E33, E26, E27,
  und Linealaufgabe G25)

4.1.1 Persönliche Daten, Computerausstattung und Kenntnisse

Die persönlichen Daten sowie die anderen, in diesem Kapitel dargestellten Daten, wurden jeweils vor den mathematischen Einzeltests in Interviews erhoben. Bei den Fragen nach Komponenten einer Computeranlage wurden die Computer in den Medienecken der Klassenzimmer genutzt.

Demographische Daten

Geschlecht		Anzahl	Prozent
Gültig	m	100	52,6
	w	90	47,4
	Summe	190	100,0

Alter (Jahre)		Anzahl	Prozent
Gültig	6	122	64,2
	7	68	35,8
	Summe	190	100,0

Tab. 4.01: Demographische Daten (Geschlecht, Alter)

Geschwister		Anzahl	Prozent
Gültig	keine	23	12,2
	jüngere	56	29,6
	ältere	83	43,9
	jüngere und ältere	27	14,3
	Summe	189	100,0
	fehlend	1	

Tab. 4.02: Familiensituation (Geschwister)

Die Untersuchungsgruppe setzt sich zu annähernd gleichen Teilen aus Jungen (53%) und Mädchen (47%) zusammen. Bei der Altersstruktur der Testpopulation zeigt sich eine 2:1 Verteilung zugunsten der Sechsjährigen (64% : 36%). Die Familiensituation wurde nur in Bezug auf die Geschwister erfasst, da man davon ausgehen kann, dass jüngere Kinder viel von älteren Geschwistern lernen. Rund 40% der befragten Kinder haben keine oder jüngere Geschwister, der Rest hat ältere, bzw. ältere und jüngere Geschwister, so dass sich hier Effekte zeigen sollten, falls es welche gibt.

Computerausstattung

Es wurden nur zwei Variablen erhoben: Hat das Kind zu Hause Zugang zu einem Computer und hat es möglicherweise einen eigenen Computer.

Computer im Haus		Anzahl	Prozent
Gültig	nein	31	18,3
	ja	159	83,7
	Summe	190	100,0

Tab. 4.03: Computer im Haus

Eigener Computer		Anzahl	Prozent
Gültig	nein	160	84,2
	ja	30	15,8
	Summe	190	100,0

Tab. 4.04: Eigener Computer

Die private Computerausstattung der Testpopulation ist sehr gut. Ungefähr vier von fünf Kindern (84%) haben zu Hause einen Computer. 15% der Kinder haben sogar einen eigenen Computer. Der eigene Computer ist meist *'der alte Computer von Papa'*. Damit liegt die Computerausstattung knapp über den Werten der letzten KIM-Studien [KIM 2002, KIM 2003], wonach 67% (2002) bzw. 74% (2003) der befragten Haushalte mit einem Computer ausgestattet waren und 13% (2002) bzw. 15% (2003) der Kinder einen eigenen Computer hatten. Die einkommensabhängigen Zahlen der Geräteausstattung in der KIM-Studie 2002, wonach 83% der Haushalte mit einem Nettoeinkommen von über 2500 Euro einen Computer haben, passen besser zur Testpopulation und beschreiben wahrscheinlich auch die häusliche Umgebung der Kinder besser. Dies wurde jedoch nicht erhoben.

Tätigkeiten am Computer

Bei der Erhebung der Tätigkeiten am Computer war vor allem die Nutzung mit Bezug zur Schule von Interesse. Die Häufigkeit der Tägigkeiten wurde nicht erhoben. Mehrfachnennungen bei den Tätigkeiten waren möglich.

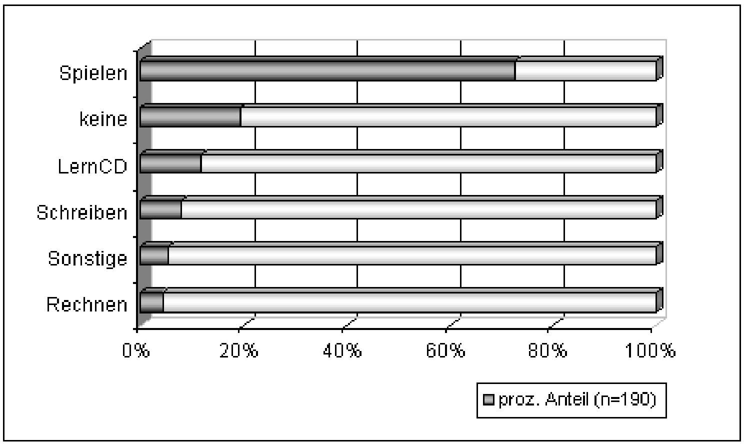


Abb. 4.01: Tätigkeiten mit dem Computer

80% der Kinder unserer Testpopulation nutzen den Computer (39% KIM 2002; 46% KIM 2003 jeweils 6-7jährige). Die meisten Kinder (73%) nutzen den Computer als Freizeitmaschine zum Spielen. Die Nutzung für schulische Aktivitäten ist nur schwach, wobei Lern-CD's (12%), Schreiben (8%) und andere Aktivitäten wie Malen etc. (5%) alle vor der Nutzung für Mathematik (4%) kommen.

In der KIM-Studie 2002 ist die Zahl für Computerspiele spielen (70%) entsprechend, alle anderen Zahlen sind dagegen weit höher: etwas für die Schule machen / Lernprogramme benutzen (43%), Texte schreiben (32%). Bei der Nutzung von Lernprogrammen stehen Programme für Mathematik (57%) und Deutsch (53%) ganz oben auf der Skala. Die Zahlen 2003 sind nur um wenige Prozentpunkte höher. Die höheren Zahlen der Kim-Studie im Vergleich zur Testpopulation resultieren aus dem Alterspektrum von 6-13 Jahren bei KIM, wo sich die Computernutzung im genannten Alterspektrum von 39% auf 82% verdoppelt. Andererseits kann man aus den Zahlen aber auch schließen, dass der Einstieg in die Computernutzung über Computerspiele geschieht und dass dann im Laufe der Zeit, mit zunehmendem Alter, sinnvollere Aktivitäten und andere Nutzungsarten dazukommen.

Kenntnisse

Kenntnisse über Computer wurden nur insofern erhoben, als die Kinder gefragt wurden, ob sie die Komponenten eines Computersystems benennen könnten. Die Kenntnis der Komponenten könnte bei Erklärungen während der Computerarbeit eine Rolle spielen.

Kenntnis Monitor		Anzahl	Prozent
Gültig	nein	116	61,1
	ja	74	38,9
	Summe	190	100,0

Kenntnis Maus		Anzahl	Prozent
Gültig	nein	33	17,4
	ja	157	82,6
	Summe	190	100,0

Tab. 4.05: Kenntnisse (Maus, Monitor)

Kinder, die mit dem Computer arbeiten, kennen die Maus (83%) als Eingabegerät. Der Begriff Monitor ist weniger geläufig (39%). Hier verwenden die Kinder häufig das Synonym 'Fernseher' oder sagen der Monitor sei der Computer. Diese Deutung ist nachvollziehbar, da der Monitor das Interface der Maschine zum Nutzer ist und somit für diese Kinder das Gesamtsystem Computer repräsentiert.

Zusammenhänge zwischen den Variablen

Wenn man die Zahlen der Computerausstattung (s.o.) zusammen mit der Nutzung betrachtet, kann man folgendes feststellen:

- Wenn im Haushalt ein Computer vorhanden ist, dann wird er von den Kindern der Testpopulation überwiegend zum Spielen genutzt (r=0,560 / p<0,001).
- Der Einstieg geschieht spielerisch, Spiele und Lern-CD's stehen im Mittelpunkt des Interesses der Kinder (r=0,160 / p=0,028).
- Beim Spielen erwerben die Kinder auch die Kenntnisse über das Computersystem, sie kennen die Begriffe Monitor (r=0,248 / p=0,001) und Maus (r=0,435 / p<0,001). Entsprechende gegenläufige, hoch signifikante Korrelationen zeigen sich natürlich bei Kindern, die nichts mit dem Computer machen (r=-0,301 / p<0,001).
- Eine schwache, signifikante Korrelation (r=0,171 / p=0,018) kann man zwischen dem Alter der Kinder und der Nutzung des Computers mit Mathematikprogrammen feststellen.

Zusammenhänge zwischen der Computerausstattung und der Nutzung des Computers mit den Ergebnissen des mathematischen Eingangstests werden weiter unten beschrieben.

4.1.2 Konstruktion der Aufgabengruppen

Der mathematische Eingangstest bestand aus 35 einzelnen Aufgaben *(siehe Anlage A1/A2)*. Die Aufgaben für den Gruppentest waren Bildaufgaben mit Arbeitsanweisungen *(siehe A2)*. Bei den Einzeltests wurden Bilder, Steckwürfel, Cuisenaire-Stäbe usw. verwendet *(siehe A3)*. Die Ergebnisse in den Aufgaben sowohl des Gruppen- wie auch des Einzeltests werden hier nicht ausführlich dargestellt. Sie finden sich in *Anlage A4* . Grundlage für die Aufgaben waren Beispiele aus dem holländischen MORE-Projekt (siehe VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN 1996). Der Test ist inzwischen in einer deutschen Fassung als OTZ (Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung) bei Hogrefe (Göttingen) erschienen.

Ursprüngliche Aufgabengruppen

Um bei der Untersuchung von Zusammenhängen nicht alle Einzelaufgaben mit den anderen Tests und mit den Ergebnissen aus der Arbeit in den Mikrowelten korrelieren zu müssen, wurden zunächst die folgenden fünf Bereiche gebildet:

- Merkmale erkennen und einfache Relationen (eu_s01)
- Relationen und Ordnungen herstellen (eu_s02)
- Zählen (eu_s03)
- Längen schätzen (eu_s04)
- Längen schätzen vs. Anzahlen erkennen (eu_s05)

Diese Einteilung stützte sich auf die verschiedenen Inhalte der Aufgaben. Die ursprünglich zu den Bereichen gehörenden Aufgaben stehen in Grafik 4.02 jeweils unter den Bezeichnungen. Für die Darstellung der Verteilungen werden jeweils Boxplots verwendet, da diese die Verteilung (min., max., Median, Quartile) sehr komprimiert und trotzdem übersichtlich darstellen (siehe [ZÖFEL 2002, 250f.]). In der Grafik wird deutlich, dass die Daten bei dieser Einteilung in den verschiedenen Bereichen nicht gut verteilt sind. Besonders die ersten beiden Bereiche, *'Merkmale erkennen'* und *'Ordnungen herstellen'*, zeigen sehr schiefe Verteilungen. Außerdem korreliert der Bereich *'Merkmale erkennen'* nur mittelmäßig mit den Ergebnissen des Gesamttests (r=0,559** / p<0,001).

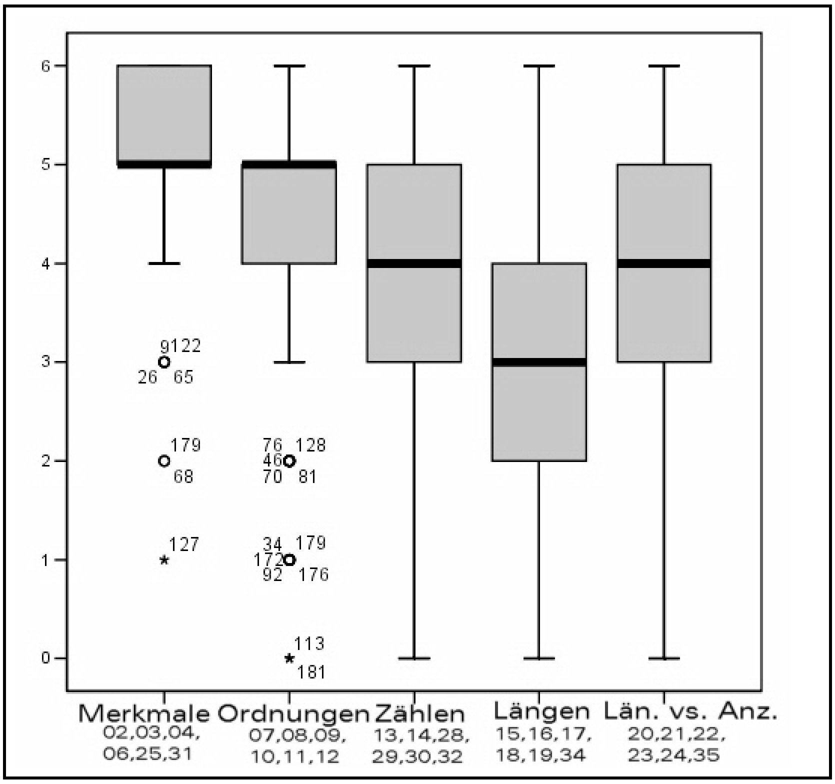


Abb. 4.02: Boxplot Eingangsuntersuchung: alte Teilbereiche

Die übrigen drei Bereiche, Zählen, Längen und Längen vs. Anzahl, zeigen dagegen recht gute Verteilungen und auch hohe Korrelationen (r: 0,715**; 0,739**; 0,638**) zum Gesamttest.

Multidimensionale Skalierung

Eine Überprüfung mit Hilfe der multidimensionalen Skalierung (vgl. [BÜHL/ZÖFEL 2002, 157ff.]) bestätigt, dass die Matrix der Ähnlichkeiten für die Aufgabengruppen nicht optimal ist. Da das Verfahren der multidimensionalen Skalierung in der Durchführung weniger aufwändig ist, als eine Faktorenanalyse und davon auszugehen ist, dass nur einzelne oder wenige Faktoren (Dimensionen) in jeder Aufgabengruppe eine Rolle spielen, wurde es für diesen Auswertungsschritt gewählt. Im Gegensatz zur Faktorenanalyse, wo aus relevanten Eigenschaften Dimensionen berechnet werden, geht man bei der multidimensionalen Skalierung davon aus, dass die zu untersuchenden Objekte ähnlich oder unähnlich sind (zum Aufbau, Ablauf und zu den Methoden siehe [BACKHAUS U.A. 2003 613ff.]). Ein weiterer Vorteil des Verfahrens liegt darin, dass Ähnlichkeiten nicht nur durch Zahlen sondern auch durch ein Diagramm dargestellt werden. Man erhält eine Visualisierung der Daten und kann Zusammenhänge leichter erfassen und benennen. Im Falle der Aufgabengruppen der Eingangsuntersuchung geht man davon aus, dass man ähnliche Aufgaben jeweils zu einer Gruppe zusammengefasst hat. Ähnliche Aufgaben bedeutet auch, dass ähnliche Fähigkeiten überprüft werden, also ähnliche Faktoren die Aufgaben charakterisieren, was dann über die Gesamtheit der untersuchten Kinder auch zu ähnlichen Ergebnissen führen müsste. Diese Ähnlichkeiten lassen sich dann statistisch nachweisen. Das Statistikpaket SPSS bietet hierfür zwei Prozeduren an: ALSCAL und PROXSCAL. Die Prozedur PROXSCAL kann nicht nur die Ähnlichkeiten von Daten aus einer Matrix oder aus einer Variablen berechnen, sondern hat auch die Option 'Ähnlichkeiten aus Daten erstellen', die zu den berechneten Ähnlichkeitsmaßen über alle Daten (Anpassungsmaße) auch eine grafische Darstellung der berechneten Ähnlichkeiten liefert.

Die Werte der Anpassungsmaße für die ursprünglichen Aufgabengruppen zeigen, wenn man die von Kruskal (vgl. [BÜHL/ZÖFEL 2002 161]) vorgeschlagenen Maße zur Beurteilung der Anpassungsgüte heranzieht, z.B. für die Aufgabengruppe 1 (STRESS1: 0,306 und STRESS2: 1,133) nicht einmal eine geringe Anpassungsgüte. Die Anpassungsmaße STRESS1 und STRESS2 sind Maße für die Güte einer Konfiguration. *'Je größer STRESS ausfällt, desto schlechter ist die Anpassung der Distanzen an die Ähnlichkeiten (badness of fit). Die Größe des*

STRESS-Maßes wird bestimmt durch die Differenzen ... zwischen Distanzen und Disparitäten.' [Backhaus u.a. 2003, 626]

Aufgrund der vorgenannten Defizite wurde versucht, eine neue, bessere Gliederung in Teilbereiche zu finden, so dass

- die Verteilung der Daten besser wird.
- sich die Korrelationen der Teilbereiche zum Gesamttest verbessern und
- die Korrelationen zwischen den Teilbereichen, die ja unterschiedliche Fähigkeiten testen sollen, möglichst gering sind.

Die ersten beiden Bereiche wurden zusammengefasst, um dann, ausgehend von den nun vier Aufgabenbereichen, für die zugehörigen Aufgaben jeweils die Maße für die Anpassungsgüte neu zu berechnen und dabei auch einzelne Aufgaben, bei denen die inhaltliche Zuordnung nicht eindeutig war, auszutauschen oder ganz zu streichen. Das Ergebnis dieses Prozesses ist in der folgenden Tabelle dargestellt.

	Bereiche	Aufgaben	STRESS1	STRESS2
eun1	Merkmale...	2, 4, 6, 8, 9, 10, 26, 27	0,0398	0,0654
eun2	Längenrel...	3, 11, 12, 16, 17, 18, 19, 22	0,0390	0,0697
eun3	Länge vs. Anzahl	7, 15, 20, 21 23, 24, 25, 35	0,0319	0,0857
eun4	Zählen	13, 14, 28, 29, 30, 31, 32, 33	0,0175	0,0034

Tab. 4.06: Teilbereiche Eingangstest

Die Maße für die Anpassung (STRESS 1 und STRESS 2) zeigen nun eine gute bis ausgezeichnete Anpassungsgüte. Auch der Faktor für die erklärte Streuung (D.A.F.) liegt mit Werten zwischen 0,998 bis 0,999 knapp unter dem optimalen Wert von 1.

Neue Aufgabengruppen der Eingangsuntersuchung

Die Beschreibung der unten genannten Einzelaufgaben findet sich in *Anlage A1/A2* , eine Beschreibung des Testhefts (Form A) in *Anlage A3*. Die vier neuen Aufgabengruppen (eun1 .. eun4) der Eingangsuntersuchung werden durch das Streudiagramm der Ähnlichkeitsmatrix (Abb. 4.03) dargestellt. Das Diagramm zeigt sehr schön, dass die vier Teilbereiche nun die verschiedenen Ausprägungen von zwei Dimensionen beschreiben. Dimension 1, 'Längen schätzen' beschreibt die Fähigkeit der Kinder, in Bildern oder bei realen Gegenständen Längen abschätzen zu können, um so zu quantitativen Aussagen zu kommen. Die Fähigkeiten bei Dimension 2, 'Merkmale erkennen' hängen natürlich von der Anzahl und der Ähnlichkeit der zu unterscheidenden Merkmale ab. Viele oder sehr ähnliche Merkmale sind schlechter zu erkennen und zu unterscheiden.

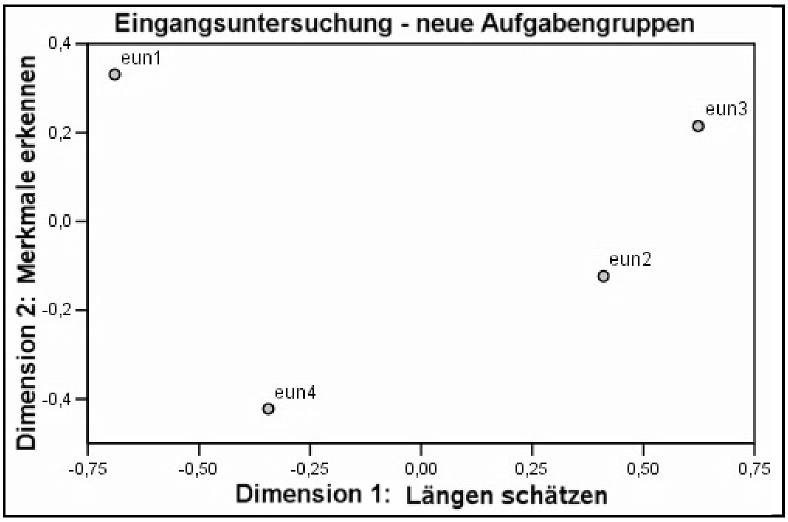


Abb. 4.03: Streudiagramm der Ähnlichkeitsmatrix: Neue Aufgabenbereiche

Über die beiden Dimensionen 'Längen schätzen' und 'Merkmale erkennen' sind die Aufgabengruppen wie folgt charakterisiert:

- eun1: Merkmale erkennen und Ordnungen herstellen

  Einzelne oder mehrere Merkmale müssen erkannt und kombiniert werden um dann Ordnungen herzustellen. Längenrelationen spielen keine Rolle.

- eun2: Längen schätzen

  Längen müssen geschätzt und verglichen werden, wobei die zu schätzenden Objekte sich nach dem Merkmal Orientierung unterschieden.

- eun3: Längen schätzen versus Anzahlen

  Längenobjekte aus Steckwürfeln gleicher und verschiedener Größe sollen verglichen werden. Die Anzahl der Merkmale ist höher als bei eun2.

- eun4: Zählen

  Verschiedene Zählaufgaben mit Objekten und ohne werden bearbeitet. Beim Zählen in größeren Schritten und beim rückwärts Zählen muss die mentale Zahlvorstellung aktiviert werden.

Es werden nun die vier neuen Aufgabengruppen in ihren Charakteristika kurz beschrieben und jeweils im Streudiagramm präsentiert, bevor dann im folgenden Unterkapitel die Zusammenhänge zwischen den Aufgabengruppen dargestellt werden.

1. Merkmale erkennen und Ordnungen herstellen

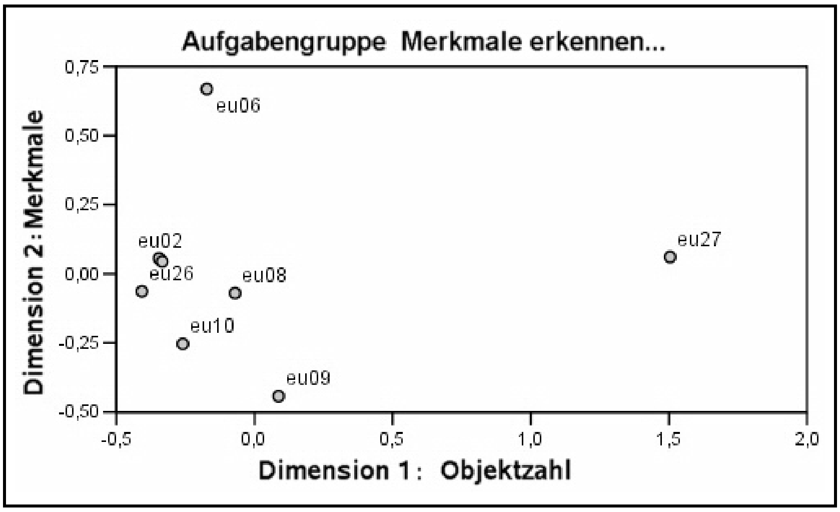


Abb. 4.04: Streudiagramm der Ähnlichkeitsmatrix: Merkmale erkennen...

Zum ersten Bereich zählen nun die Aufgaben 2, 4, 6, 8, 9, 10, 26, 27. Während bei den Aufgaben 2, 4, 6, 8, 9, und 10 einzelne oder mehrere Merkmale erkannt werden müssen um dann Ordnungen herzustellen, waren die Aufgaben 26 und 27 ursprünglich Teilaufgaben des Bereichs Zählen. Bei Aufgabe 26 sollen die Würfelbilder der 'Fünf' und der 'Sechs' erkannt werden, bei Aufgabe 27 müssen 15 ungeordnete Luftballons einem entsprechenden Würfelbild aus drei Fünfergruppen zugeordnet werden. Das Streudiagramm der Ähnlichkeitsmatrix zeigt zwei Dimensionen: Anzahl und Unterscheidbarkeit der Merkmale und Anzahl der Objekte.

Aufgabe 27 (Luftballonaufgabe) hat z.B. sehr viele Objekte, aber nur wenige Merkmale die unterschieden werden müssen, während bei Aufgabe 6 (Apfelaufgabe) wenige Objekte mit vielen Merkmalen koordiniert werden müssen. Aufgabe 26 zeigt nur die zwei Würfelbilder fünf und sechs, die in der Regel bekannt sind, folglich ergeben sich wenige Merkmale und wenige Objekte.

2. Längenrelationen erkennen und schätzen

Bei den Aufgaben zum Längenschätzen (3, 11, 12, 16, 17, 18, 19, 22) zeigen sich zwei Gruppen von Aufgaben, die hauptsächlich durch einen Faktor (Dimension 1: Orientierung) bestimmt werden. Abhängig von der Orientierung des Vorgabeobjekts und der zu schätzenden Objekte finden sich die Aufgaben in den beiden Gruppen. In den Aufgaben 17, 12 und 19 sind die zu schätzenden Vergleichsobjekte alle unterschiedlich orientiert und zeichnen sich durch mehrere Merkmale aus. Die Objekte in den anderen Aufgaben sind alle senkrecht oder alle waagrecht orientiert (z.B. eu03: das höchste Haus aus einer

Reihe von vier Häusern ankreuzen!). Eine zweite Dimension ist nicht offensichtlich.

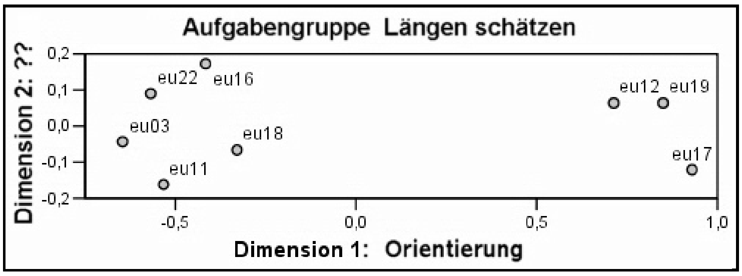


Abb. 4.05: Streudiagramm der Ähnlichkeitsmatrix: Längen schätzen

3. Längen schätzen versus Anzahlen

Bei dieser Aufgabengruppe (Aufgaben 7, 15, 20, 21, 23, 24, 25, 35) liefert das Streudiagramm Hinweise auf mindestens zwei Dimensionen.

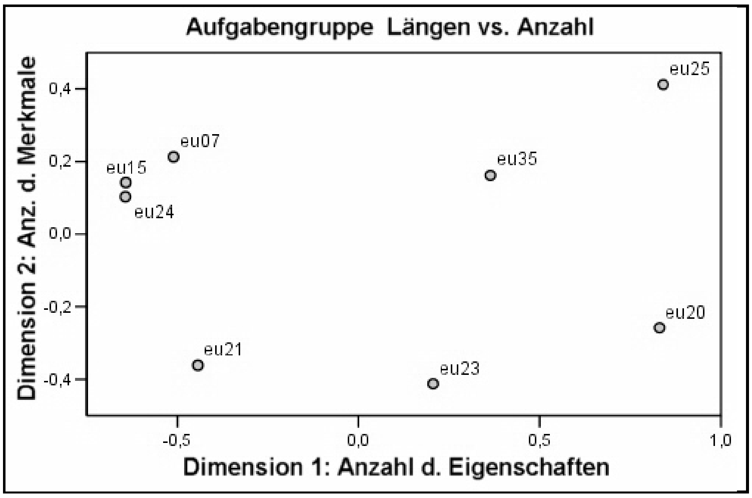


Abb. 4.06: Streudiagramm der Ähnlichkeitsmatrix: Längen vs. Anzahl

Die Teilaufgaben in Aufgabengruppe 3 sind Aufgaben, bei denen nach Längen gefragt ist. Die Objekte sind aber aus Steckwürfeln zusammengesetzt und könnten deshalb auch anzahlmäßig bewertet werden. Die Anzahl der zu berücksichtigenden und zu kombinierenden Eigenschaften nimmt von Aufgabe 24 (Höhe eines Würfelturms abschätzen) bis zu Aufgabe 20 (Längeneigenschaft einer Steckwürfelschlange mit anderen Würfelschlangen aus verschieden großen Steckwürfeln vergleichen) zu und beschreibt damit grob Dimension 1. Die sichtbaren Merkmale der unterschiedlichen Aufgaben beschreiben möglicherweise Dimension 2.

4. Zählen

Zur Aufgabengruppe 'Zählen' gehören die Aufgaben 13, 14, 28, 29, 30, 31, 32 und 33. Dies sind überwiegend Aufgaben, die die verbale Zählfertigkeit testen.

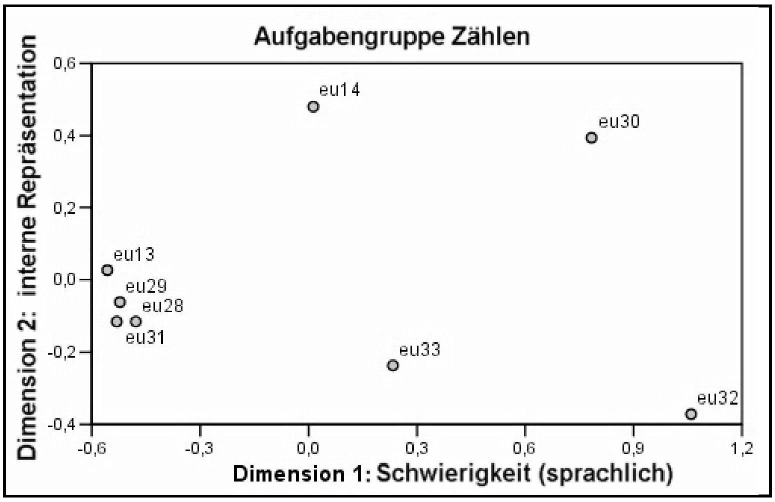


Abb. 4.07: Streudiagramm der Ähnlichkeitsmatrix: Zählen

Die zunehmende Schwierigkeit beim Zählen und damit Dimension 1 wird durch folgende Aufgaben beschrieben:

- 28: vorwärts Zählen in Einerschritten bis 20
- 33: 20 Würfel mit den Augen abzählen
- 30: vorwärts Zählen bis 14 in Zweierschritten
- 32: rückwärts Zählen ab 17 in Einerschritten

Eine plausible Erklärung für Dimension 2 könnte sein, dass bei bestimmten Aufgaben neben der verbalen Zählfähigkeit die mentale Zahlvorstellung aktiviert werden muss - z.B. bei Aufgabe 13 (die 9. Blume) und Aufgabe 14 (18. Blume), wo eine Objekt - Zahl Zuordnung gemacht werden muss oder bei Aufgabe 30 (vorwärts Zählen in Zweierschritten), wo man sich die Zahlenfolge am mentalen Zahlenstrahl vorstellen muss, um dann beim Vorwärtsgehen jeweils eine Zahl zu überspringen. Hier reichen möglicherweise rein verbale Fähigkeiten nicht aus, um die Aufgaben zu meistern.

4.1.3 Ergebnisse der mathematischen Eingangsuntersuchung

Die Daten der Eingangsuntersuchung (mathematischer Teil) stellen sich, nach der neuen Gliederung in vier Aufgabenbereiche, nun besser verteilt dar.

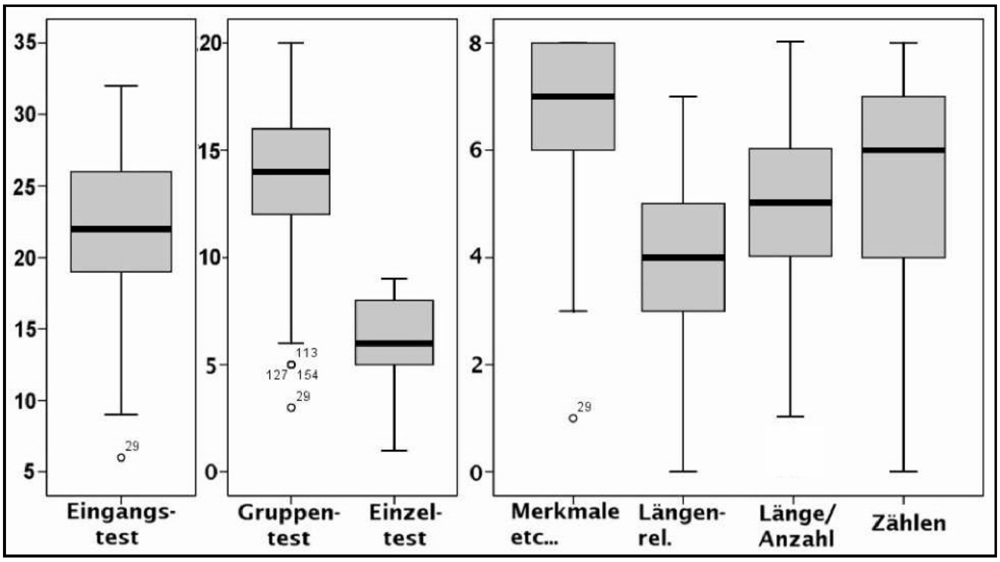


Abb. 4.08: Boxplot Mathematischer Eingangstest: Ergebnisse

Aufgabengruppe 1 besteht aus sehr leichten Aufgaben, so dass eine stark rechtsschiefe Verteilung entsteht - über die Hälfte aller Kinder hat 7 Punkte oder die maximale Punktzahl erreicht. Ebenso sind die Aufgaben zum Zählen (Aufgabengruppe 4) leicht rechtsschief, hier haben über 50 % der Kinder 6 oder mehr von 8 möglichen Punkten erreicht. Die beiden Bereiche 'Längen schätzen' und 'Längen vs. Anzahlen erkennen' weisen nahezu Normalverteilung auf, die Mehrzahl der Kinder haben mittlere Punktzahlen erreicht.

In Tabellenform dargestellt sieht man dieselben Verteilungsmerkmale:

		Merkmale...	Längenrel...	Längenanz...	Zählen	gesamt
N	Gültig	190	190	190	190	190
	Fehlend	0	0	0	0	0
Median		7	4	5	6	22
Mittelwert		6,71	4,29	4,85	5,67	21,52
Std. Abweichung		1,443	1,576	1,716	1,742	4,919
min - max		1 - 8	0 - 7	1 - 8	0 - 8	6 - 32

Tab. 4.07: Verteilungsmaße der Aufgabengruppen im Eingangstest

Ein Mittelwertvergleich für die Aufgabengruppen mit Hilfe des t-Tests nach Student (vgl. [ZÖFEL 2002, 92ff.]) zeigt Varianzenhomogenität (F), die Varianzen unterscheiden sich nicht signifikant. Man erhält signifikante t-Werte zwischen den Bereichen Merkmale erkennen und Zählen (F=0,686 ; t=6,387 ; df=194), Längenrelationen und Längenanzahlen (F=1,03 ; t=3,31 ; df=194) und Längenanzahlen und Zählen (F=0,97 ; t=4,62 ; df=194). Einzig zwischen den Bereichen Merkmale erkennen und Längenrelationen (F=0,82 ; t=1,41 ; df=194) gibt es keine signifikanten Unterschiede.

Eine genaueren Überblick über die Verteilung zeigt die folgende Tabelle der Häufigkeiten:

	Merkmale...		Längenrel...		Längenanz...		Zählen	
Punkte	Anzahl	Prozent	Anzahl	Prozent	Anzahl	Prozent	Anzahl	Prozent
0	-	-	1	0,5	-	-	1	0,5
1	1	0,5	9	4,7	5	2,6	3	1,6
2	-	-	15	7,9	16	8,4	5	2,6
3	8	4,2	33	17,4	20	10,5	12	6,3
4	11	5,8	42	22,1	37	19,5	27	14,2
5	10	5,3	43	22,6	39	20,5	28	14,7
6	36	18,9	34	17,9	39	20,5	48	25,3
7	53	27,9	13	6,8	25	13,2	35	18,4
8	71	37,4	-	-	9	4,7	31	16,3
Summe	190	100	190	100	190	100	190	100

Tab. 4.08: Häufigkeiten der Aufgabengruppen im Eingangstest.

Die prozentualen Angaben der richtigen Lösungen in den Einzelaufgaben der Eingangsuntersuchung finden sich in *Anlage A4*.

Die Matrix der Korrelationen (n=190) zeigt mittlere bis hohe signifikante Korrelationen (Rangkorrelationen n. Spearman) der Aufgabengruppen zum Gesamttest.

Gruppentest (GT)	,927**					
Einzeltest (ET)	,757**	,498**				
Merkmale... (eun1)	**,693****	,611**	,591**			
Längenrel... (eun2)	**,796****	,855**	,437**	***,420****		
Längen vs. Anz. (eun3)	**,737****	,748**	,389**	***,365****	***,534****	
Zählen (eun4)	**,726****	,526**	,879**	***,444****	***,418****	***,290****
	Gesamt	GT	ET	eun1	eun2	eun3

** Korrelation ist signifikant auf dem 0.01 Niveau.
* Korrelation ist signifikant auf dem 0.05 Niveau.

Tab. 4.09: Korrelationskoeffizienten und Signifikanzen für den Eingangstest

Die Aufgabengruppen untereinander sind eher gering korreliert.

Neben diesen Korrelationen zwischen den Aufgabengruppen und dem Gesamttest, gibt es auch schwache, aber hoch signifikante Zusammenhänge mit einzelnen Fragen des allgemeinen Teils.

Zwischen den dichotomen Variablen des allgemeinen Teils und den Ergebnissen im mathematischen Test wurden punktbiseriale Korrelationen (vgl. [ZÖFEL 2002, 137ff.])berechnet. Die Variablen korrelieren schwach aber hoch signifikant (df=188 und t>3,4 damit ist p<0,001):

- Wer von den Kindern zuhause einen Computer hat, erreicht beim mathematischen Eingangstest höhere Punktzahlen (r=0,329**).
- Auch wer mit dem Computer 'nur spielt', schneidet besser ab (r=0,306**).
- Wer nichts mit dem Computer macht, ist entsprechend schlechter (r= -0,340**). Diese Zusammenhänge zeigen sich auch schwach bei den Aufgabenbereichen Merkmale erkennen (r= -0,321**), Längen schätzen (r= -0,243**) und Längen vs. Anzahlen schätzen (r= -0,251**), nicht jedoch für den Bereich Zählen.
- Bei den Aufgaben der Einzeltests erreichen die Mädchen eher höhere Punktzahlen (r=0,269**).

Das bessere Abschneiden der Kinder mit 'Computer im Haus' beim Eingangstest ist sicher nicht auf das Vorhandensein eines Computer zurückzuführen. Die Variablen 'Computer zuhause' bzw. 'Spielen mit dem Computer' beschreiben eine bestimmte familiäre Situation. Die Familien sind besser situiert, die Eltern möchten, dass sich ihre Kinder mit dem Computer beschäftigen, sind also ganz allgemein daran interessiert, was ihre Kinder machen und unterstützen und fördern diese.

Der Aufgabenbereich Zählen zeigt keinerlei Korrelationen mit den Fragen des allgemeinen Teils. Auch Alter, Geschlecht und ob jemand ältere Geschwister hat, spielen keine Rolle bei den Ergebnissen des Gesamttests und innerhalb der Aufgabenbereiche. Die Ergebnise des Gruppentests und des Einzeltests zeigen dieselben Zusammenhänge mit dem allgemeinen Teil, wie beim Gesamttest, mit einer Ausnahme: wer mit dem Computer spielt, ist beim Gruppentest signifikant besser (r=0,317**). Bei den Einzeltests zeigt sich kein Zusammenhang. Daraus könnte man folgern, dass diese Kinder eher daran gewöhnt sind, Probleme selbständig zu bearbeiten und zu lösen, wie in den Gruppentests und nicht aktiviert werden müssen, was bei den Einzeltests gemacht wird.

Wenn man die Ergebnisse des Eingangstests aufsplittet und das obere Quartil (Pkte.>26 ; n=66) sowie das untere Quartil (Pkte.<19 ; n=61) in Korrelation zum Gesamttest setzt, zeigt sich, dass die guten Schüler ihre Punkte auch in den Aufgabenbereichen 'Längen vs. Anzahlen schätzen' (r=0,632**) und 'Längen schätzen' (r=0,462**) erreicht haben, während Kinder des unteren Viertels in den Bereichen 'Längen schätzen' (r=0,459**), 'Zählen' (r=0,415**) und 'Merkmale erkennen' (r=0,625**) erfolgreich Punkte sammeln.

Wichtig im Hinblick auf die Gesamtuntersuchung und die dahinter stehenden Forschungsfragen, auf die dann im abschließenden fünften Kapitel rekuriert wird, sind aus diesem Unterkapitel vor allem die beiden folgenden Punkte:

- *Um die Aufgabenbereiche 'Merkmale erkennen', 'Zählen' und 'Längen schätzen' des mathematischen Eingangstests zu bearbeiten brauchen die Kinder eher Grundfähigkeiten.*
- *Die Bereiche 'Längen schätzen' und vor allem 'Längen vs. Anzahlen schätzen' fordern eher komplexere Fähigkeiten von den Kindern.*

4.1.4 Ausgewählte Teilaufgaben der Eingangsuntersuchung

Zählfertigkeiten

Die folgende Tabelle zeigt die Aufgaben aus dem Bereich Zählen nach der Häufigkeit geordnet. Kursiv gedruckt sind die beiden Aufgaben aus dem Bereich Merkmale erkennen, bei denen Würfelbilder erkannt werden mussten. Die Ergebnisse zeigen eine deutliche Zunahme der Schwierigkeit und damit einen Rückgang der richtigen Lösungen vom einfachen Vorwärtszählen bis zum Zählen in Zweierschritten und zum Rückwärtszählen.

Nr	Aufgabe	n/190	% richtig
(E26)	*Würfelbilder 5 und 6 erkennen*	181	95,3
E29	Zähle von 9 - 15	170	89,5
E28	Zähle bis 20	168	88,4
E31	Würfelbilder 4 und 5 schnell erkennen	168	88,4
G13	Kreuze die 9. Blume an	158	83,2
G14	Kreuze die 18. Blume an	131	68,9
E33	20 Würfel mit den Augen zählen	127	66,8
(E27)	*Zuordnung 15 Luftballons und Würfel-Punktbild*	101	53,2
E30	Zähle bis 14 in 2er Schritten	90	47,4
E32	Von 17 rückwärts zählen (mit Material)	66	34,7

Tab. 4.10: Vorerfahrung Zahlenwissen - richtige Lösungen

Obwohl es viele Untersuchungen zum arithmetischen Vorwissen von Kindern zu Beginn der Schulzeit gibt, sind die Ergebnisse nicht unbedingt vergleichbar.

So stellt MOSEROPITZ[2001, 123ff.] eine Untersuchung in (heilpädagogischen) Kleinklassen vor, bei der unter anderem folgende Ergebnisse beobachtet wurden:

- Würfelbild 4 richtig erkannt (75,8%)
- Würfelbild 5 richtig erkannt (66%)
- Verbales Zählen bis 20 ohne Fehler (55,6%)

- Rückwärts Zählen ab 6 (50%)

Die immer wieder zitierte Untersuchung von Schmidt (vgl. [PADBERG 1992, 11]) zeigte schon 1982, die hohe verbale Zählfertigkeit der Schulanfänger:

- Vorwärts Zählen bis 20 (70%)

GRASSMANN (1995b, 186ff.) stellt ihre eigenen und die Untersuchungen aus dem MORE-Projekt zusammen und kommt beim rückwärts Zählen (MORE problem 14: before 8) zu folgendem Ergebnis:

- Rückwärts Zählen, die Zahl vor 8, ... (~70%)

Die Ergebnisse unserer Population lagen alle über diesen Vergleichswerten. Einzig V.ASTER[1996 ,S.59f.] liefert ein bemerkenswert hohes Ergebnis:

- Rückwärts Zählen von 22 bis 1 (Kinder < 8Jahre): 47,1%

Er stellt aber auch fest, dass der Einfluss des Alters auf die Zählleistung signifikant ist. Dies lässt sich auch schwach (r=0,170*) in unserer Population nachweisen. Da unsere Schulanfänger im Durchschnitt deutlich unter 7 Jahre waren, ist der, im Vergleich mit V.ASTER, niedere Wert beim rückwärts Zählen plausibel.

Diese starke Altersabhängigkeit beschreibt auch HASEMANN[2001, 54f.], der Ergebnisse des OTZ aus 3 Testgruppen, die mit zeitlichem Abstand getestet wurden, darstellt.

Alter	Durchschnitt	Bandbreite
6,2 J.	23,7 P.	5 - 39
6,5 J.	26,3 P.	5 - 40
7,2 J.	32,9 P.	12 - 40

Tab. 4.11: Ergebnisse OTZ - Versch. Altersgruppen [n. HASEMANN 2001, 54]

Die Daten zeigen eine starke Entwicklung der Fertigkeiten in den ersten Schulwochen, aber gleichzeitig auch eine sehr starke Streuung, die ebenso in unserer Testpopulation beobachtet werden konnte (vgl. Abb. 4.08).

Zusammenfassend, im Vergleich mit anderen Untersuchungen, kann man feststellen, dass die Leistungen im Aufgabenbereich Zählen sehr hoch waren (Mittelwert 5,67 von 8 Pkten). Allerdings muss man auch bedenken, dass in diesem Bereich die Standardabweichung (s = 1,74), also fast zwei Aufgaben von 8, die höchste aller vier Bereiche ist. Die Schulanfänger haben zwar im Durchschnitt eine hohe Zählkompetenz, es gibt aber gleichzeitig große Unterschiede zwischen den einzelnen Kindern. Die Zählkompetenz für die Grundstrategie beim Arbeiten in den Computermikrowelten, das *'vorwärts Zählen in Einerschritten bis 20'*, beherrschen knapp 90% aller Kinder.

Linealaufgabe (G25)

Die Linealaufgabe: *'Zeichne ein Lineal in den Kasten !'*, war die letzte Aufgabe des Gruppentests. Damit sollte in Form einer freien Aufgabe die Zahlenstrahlvorstellung der Schüler erforscht werden.

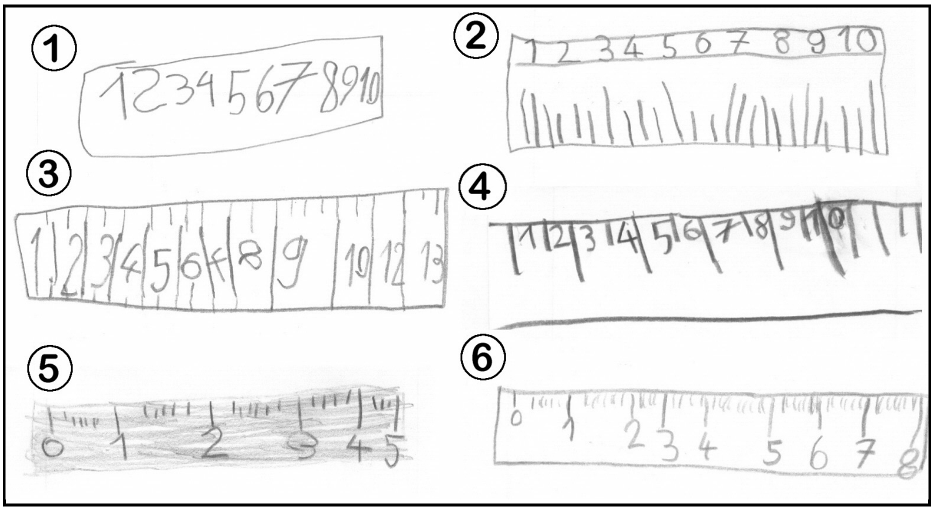


Abb. 4.09: Aufgabe G25 - Linealzeichnungen (Bsp.)

Die Ergebnisse zeigen differenzierte stark unterschiedliche Vorstellungen. Bei der Auswertung wurden folgende Kriterien berücksichtigt:

- Wie weit geht die Zahlenreihe der Beschriftung?
- Gibt es Markierungen für die Ganzzahlen?
- Wo sind diese Markierungen?
- Gibt es Zwischenskalierungen?
- Mit welcher Zahl beginnt die Beschriftung?
- In welche Richtung wird beschriftet?
- Welche Form hat das Lineal?
- Kommen spiegelbildliche Zahlen vor?
- Welche Fehler gibt es in der Zahlenreihe?

Eine ausführliche Darstellung der Auswertung findet man in Dreyer[2002]. Hier werden nur kurz Befunde in Zusammenhang mit dem Gesamtprojekt referiert.

Interessant sind vor allem die Zahlenreihe der Beschriftung des Lineals und der Beginn dieser Zahlenreihe, sowie Fehler in der Zahlenreihe. Andere Punkte, wie z.B. die Form des Lineals oder ob es spiegelbildliche Zahlen in der Beschriftung gibt, sind für den Zusammenhang völlig unerheblich und weisen auch keinerlei Korrelation auf.

Zahlenreihe der Linealbeschriftung	Anzahl	Prozent	kumulierte %
0: keinerlei Beschriftung	57	30,0	--
1: Beschriftung bis 5	24	12,7	70,0
2: Beschriftung bis 7	27	14,2	57,3
3: Beschriftung bis 10	31	16,3	43,1
4: Beschriftung bis 15	34	17,9	26,8
5: Beschriftung bis 20	15	7,9	8,9
6: Beschriftung über 20	2	1,0	1,0
Summe:	190	100,0	

Tab. 4.12: Aufgabe G25 - Zahlenreihe der Linealbeschriftung

Auffällig ist, dass ca. ein Drittel der Schüler beim Lineal nicht an die Beschriftung mit Zahlen denkt. Die Beschriftungen erstrecken sich über den Bereich von 1 bis 24 und es sind alle Zahlen dazwischen vertreten. Entsprechend stellen sich auch die Verteilungsmaße dar: arithm. Mittel = 6,74 und s=5,76 (Standardabweichung). Eine Beschriftung bis 20, also über den Bereich, den die Computermikrowelten abdecken, macht nur knapp 9 % der Schüler. Dies sollte man aber nicht überbewerten, da bei der Durchsicht der Zeichnungen (s.o.) der Eindruck entsteht, dass der Platz (DIN A5) für viele Schüler einfach nicht ausreichend war, um eine vollständige Skala bis 20 zu zeichnen und sich die Schüler deshalb möglicherweise damit benügten, die 'Idee des Lineals' darzustellen, also die Beschriftung und Skala ab dem Anfang ein Stück weit zu zeichnen. Für eine verkürzte Skala spricht auch die Tatsache, dass die Lineale, die Kinder üblicherweise in ihrem Mäppchen vorfinden eine Skala bis 10 haben.

Wie die Zahlenreihe der Beschriftung, so weist auch der Beginn dieser Zahlenreihe, also die Zahl mit der das Kind die Beschriftung beginnt, eine große Bandbreite auf.

Beginn der Markierungen	Anzahl	Prozent
0: keine Beschriftung	57	30,0
1: bei irgendeiner Zahl (z.B. 2,5,6)	5	2,6
2: bei 1	97	51,1
3: bei 0	30	15,8
Fehlende Werte (System):	1	0,5
Summe:	190	100,0

Tab. 4.13: Aufgabe G25 - Beginn der Beschriftung bei Null

Nur jeder sechste Schüler beginnt seine Beschriftung der Skala bei Null. Über die Hälfte der Kinder fängt bei Eins an. Diese zunächst überraschenden Werte relativieren sich, wenn selbst zu Beginn der zweiten Klasse noch unvollständige Linealbilder und der Beginn der Skala bei Eins statt bei Null gezeichnet werden (vgl. [NÜHRENBÖRGER 2002, 163ff.])

Fehler bei Beschriftung	Anzahl	Prozent
0: Fehler oder keine Beschriftung	78	41,1
1: keine Fehler	112	58,9
Summe:	190	100,0

Tab. 4.14: Aufgabe G25 - Fehler bei der Beschriftung

Über die Hälfte aller Kinder beschriftet die Linealzeichnung korrekt, was darauf hindeutet, dass die Mehrzahl der Kinder gute mentale Vorstellungen vom Lineal hat.

Die hier aufgezeigten Merkmale der Linealzeichnungen korrelieren gering, aber höchst signifikant mit den vier Aufgabenbereichen des Eingangstests (ausführliche Tabelle siehe *Anlage A5*). Bei dem Item *'Anfang bei 0 oder 1'* , wo die höchsten Korrelationen auftreten, sind die guten Schüler in allen Bereichen des Eingangstests auch diejenigen, die die Beschriftung der Skala korrekt bei 0 beginnen.

Korrelationen nach Spearman (N=190)	Anfang bei 0 oder 1
Merkmale erkennen ...	,306**
Längen schätzen...	,193**
Längen vs. Anzahlen...	,270**
Zählen	,250**
alle Aufgaben	,343**

** Korrelation ist signifikant auf dem 0.01 Niveau.

Tab. 4.15: Aufgabe G25 - Korrelationen mit dem Eingangstest

Interessant ist auch, dass die höchste Korrelation zum Aufgabenbereich 1 *'Merkmale erkennen...'* besteht. Wer Merkmale, Relationen und Ordnungen gut erkennen kann, weiß auch, dass die Skala am Lineal bei 0 beginnt. Offensichtlich spielt diese Fähigkeit 'Merkmale erkennen...' für die Ausbildung mathematischer Fertigkeiten und Fähigkeiten eine große Rolle. Dies wird ja auch beim e-i-s Prinzip auf der ikonischen Ebene mit interpretierten bildhaften Darstellungen mathematischer Inhalte vorausgesetzt. Außerdem ist die bildhafte Darstellung mit bestimmten Merkmalen eine der didaktische Stufen, die beim Verinnerlichen mathematischer Begriffe durchschritten werden muss.

Es wurden auch Zusammenhänge mit dem allgemeinen Teil des Eingangstests untersucht, hier zeigen sich jedoch nur vereinzelt sehr geringe Korrelationen. Zwischen dem Item *'Zahlenreihe der Linealbeschriftung'* und einzelnen Teilaufgaben des Bereichs Zählen gibt es geringe Korrelationen zu Aufgabe 28 *'Zähle bis 20!'* (r=0,259**) und Aufgabe 30 *'Zähle bis 14 in Zweierschritten!'* (r=0,214**), was ja logisch erscheint: wer die Zahlenreihe nicht kennt, kann auch das Lineal nicht beschriften.

- ***Diejenigen Kinder, die das Linealbild aus dem Gedächtnis korrekt beschriften können, haben auch die Zählaufgaben erfolgreich bearbeitet.***

4.1.5 Zusammenfassung

Der Eingangstest zeigt, mit Blick auf die bevorstehende Arbeit in den Mikrowelten, insgesamt ein relativ positives Bild in den Eingangsklassen. Computer sind für viele Kinder nichts Neues (84%), sie spielen damit und werden von ihren Eltern auch mit Lern-CD's versorgt; d.h. die computerbasierten Meßwerkzeuge für die bevorstehende Untersuchung werden von den Kindern sicher nicht als 'Fremdkörper' empfunden oder gar abgelehnt werden. Die rund 20% von Kindern, die sich noch nicht mit dem Computer beschäftigen, schneiden beim mathematischen Eingangstest etwas schlechter ab. Keine Rolle spielen Variablen wie Alter, Geschlecht und Geschwister. Eine grundlegende Zählkompetenz ist bei der Mehrzahl der Kinder (~90%) vorhanden. Längen schätzen in links-rechts geordneten Objekten können die meisten Kinder sehr gut (G15: 80%). Damit scheinen bei rund 80% der Kinder die grundlegenden Fähigkeiten zum Arbeiten in den Computermikrowelten vorhanden zu sein. Die Ergebnisse der Linealaufgabe zeigen, dass viele Kinder relativ genaue mentale Modelle vom Lineal und damit sicher auch eine Grundvorstellung des mentalen Zahlenstrahls haben.

4.2 Einführungsstunde - mentales Modell

4.2.1 Methoden - Auswertung

Das zum Ende der Einführungsstunde von den Schülern ausgefüllte Arbeitsblatt (siehe *Anlage B2*) wurde nach folgenden beiden Kriterien ausgewertet:

- Schrittzahl: stimmt die Anzahl der Schritte mit der Vorgabe überein?
- Proportionalität: sind die Einzelschritte gleichlang, immer abhängig von der Gesamtstrecke?

Für die beiden Kriterien wurde die Summe der richtigen Aufgaben gezählt und daraus dann die Gesamtpunktzahl für das Arbeitsblatt ermittelt. Die folgenden beiden Bilder zeigen jeweils bewertete Beispiele aus den Arbeitsblättern zu den beiden Bereichen Schrittzahl und Proportionalität.

Auswertung I: Schrittzahl

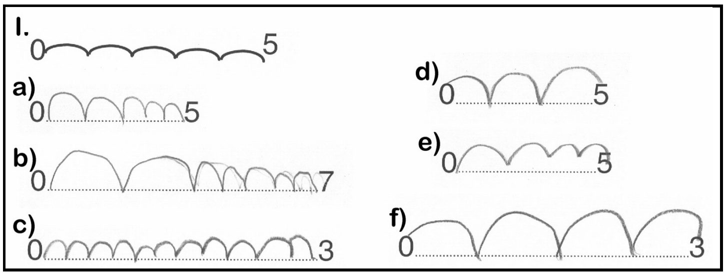


Abb. 4.10: Einführungsstunde: Auswertung Schrittzahl

- a) richtig, Schrittzahl korrekt; b) richtig, Schrittzahl korrekt,obwohl die Proportionalität nicht stimmt; c) falsch; d) falsch; e) falsch, die Punkte einschließlich Startpunkt wurden gezählt; f) falsch, nur die Zwischenpunkte wurden gezählt.

Auswertung II: Proportionalität

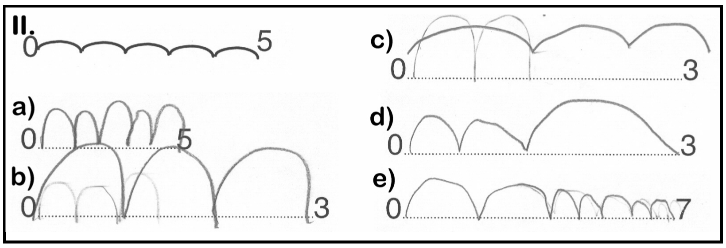


Abb. 4.11: Einführungsstunde: Auswertung Proportionalität

- a) richtig; b) richtig, Schrittlänge wurde korrigiert; c) falsch, trotz Korrektur nicht proportional; d) falsch, letzter Schritt zu groß; e) falsch, erste Schritte zu groß.

Die Beispiele zeigen, dass es einzelne Kinder gibt, welche die Metapher des Igels, der Schritt für Schritt zu einer bestimmten Zahl geht, überhaupt nicht verstanden haben (I.c, I.d). Es zeigen sich aber auch systematische Fehler, da nicht die Schritte (Streckenstücke), sondern die Schrittpunkte (I.e) bzw. die Zwischenpunkte (I.f) gezählt werden.

Bei der Idee der Proportionalität sieht man die folgenden systematischen Fehler: die ersten Schritte (II.d) bzw. der letzte Schritt (II.e) werden zu groß gewählt, weil man zu sehr auf die Anzahl der Schritte fokusiert ist und nur wenige Kinder korrigieren sich dann. Um eine korrekte Zeichung der Igelschritte anzufertigen müssen aber beide Konzepte integriert werden.

4.2.2 Verteilung der Daten

Die Daten weisen alle eine sehr hohe Streuung auf. Im Boxplot unten (Abb. 4.12) wird dies noch deutlicher. Die Verteilung der Gesamtdaten ist rechtsschief ebenso die Verteilung der Daten zur Schrittzahl. Dies deutet darauf hin, dass die Mehrzahl der Kinder keine Probleme hat, die Schrittzahl korrekt zu konstruieren. Bei der Proportionalität zeigt sich wieder die hohe Streuung.

N 179	Pkte-Summe	Schrittzahl	Proportionalität
Mittelwert ($\underline{x}$)	16,23	9,09	7,14
Std. Abweichung (s)	6,011	2,922	3,607
Bereich	0 .. 24	0 .. 11	0 .. 13

Tab. 4.16: Einführungsstunde - Streuung der Daten

Die Boxplots des Gesamttests und der Teiltests zeigen deutlich, dass die Mehrzahl der Kinder die Ideen aus der Einführungsstunde aufgenommen haben.

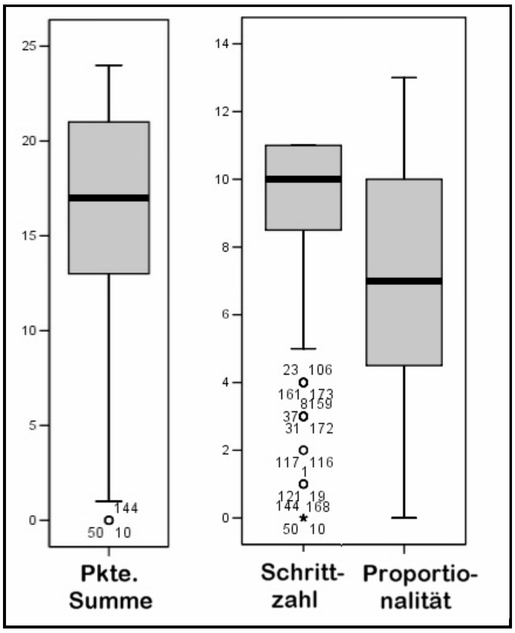


Abb. 4.12: Einführungsstunde Daten - Boxplot

In der Bewertung des Gesamttests haben 75% der Kinder 21 von 24 möglichen Punkten erreicht. Im Bereich Schrittzahl haben 78% der Kinder 8 von 11 Punkten und 50% haben 11 Punkte erreicht. Die Metapher *'Anzahl Schritte bis zur gesuchten Zahl'* wurde von den meisten Kindern verstanden. Nicht so gut sieht es bei der Idee der Proportionalität aus. Hier erreichen gerade 50% der Kinder die Hälfte der möglichen 14 Punkte.

Als Fazit aus den gehaltenen Einführungsstunden in den elf Klassen bleibt die Erkenntnis, dass die Igelmetapher zwar eingeführt und motiviert wurde und dass die Metapher später bei der Arbeit in den Computermikrowelten von den Kindern benutzt wurde, um zu erklären, was sie gerade machen: *'Der Igel muss jetzt ...'*. Andererseits wurde aber die Idee der Proportionalität, *'der Igel macht gleichgroße Schritte'*, also die Koordination von Schrittzahl und Schrittlänge in Bezug zur Gesamtstrecke, die man gehen muss, von vielen Kindern nicht richtig oder gar nicht verstanden. Eventuell setzt gerade diese Koordination einen voll entwickelten mentalen Zahlenstrahl voraus, auf dem Zahlen als Relationszahlen in ihrem Kontext existieren.

- *Die Igelmetapher wurde von den meisten Kindern übernommen und genutzt.*
- *Die für das Längenschätzen am Zahlenstrahl grundlegende Idee der Proportionalität, die eine Koordination von Schrittzahl, Schrittlänge und Gesamtstrecke voraussetzt, wurde von den Kindern nur in Ansätzen zusammen mit der Igelmetapher übernommen.*

4.3 Auswertung der Computerprotokolle

Die Auswertung der Computerprotokolle beginnt jeweils mit deskriptiver Statistik, danach werden Korrelationen innerhalb der Mikrowelten zstrich0, zstrich1 und zstrich2 und zwischen diesen Mikrowelten untersucht. Je nach Fragestellung wird nach Personen oder nach Aufgaben ausgewertet.

Die geplante Trennung der Darstellung in eine quantitative und qualitative Auswertung lässt sich nicht streng durchhalten, da auch in der quantitativen Datenauswertung immer wieder qualitative Elemente sichtbar werden.

Außerdem soll hier noch einmal darauf hingewiesen werden, dass in diesem Kapitel lediglich einzelne Belege gesammelt werden, die dann im letzten Kapitel in einer Zusammenschau zur Beantwortung der Forschungsfragen herangezogen werden. Erst dann kann auch ein Gesamtbild des Konstrukts 'mentale Zahlvorstellung' entstehen.

4.3.1 Vergleich der Daten und Korrelationen

Aufgabenzahlen, richtige und falsche Lösungen

Die erste Mikrowelt (zstrich0) wurde von insgesamt 177 Kindern bearbeitet, zstrich1 noch von 132 und zstrich2 nur noch von 64 Kindern. Der Anteil der Mädchen, die die verschiedenen Mikrowelten bearbeitet haben, sank von 47% (zstrich0) über 43% (zstrich1) auf 35% (zstrich2). Auch die Anzahlen der jeweils bearbeiteten Aufgaben sowie die Anzahlen richtiger Lösungen bei den einzelnen Kindern streuen über einen weiten Bereich. Die Daten in der folgenden Tab. 4.17 wurden aus den Kurzprotokollen der Einzelaufgaben gewonnen, weshalb sich die bearbeitete Aufgabenzahl zwischen 0 und 99 bewegt. Alle folgenden Auswertungen wurden mit diesen Kurzprotokollen durchgeführt.

		Aufgabenzahl			
	N	min.	max.	Mittelwert	Std.Abw.
zstrich0	177	2	99	41,8	26,7
zstrich1	132	2	99	47,9	27,8
zstrich2	64	1	98	41,3	24,8
richtig z0	177	1	97	34,9	24,5
richtig z1	132	0	73	37,9	18,2
richtig z2	64	0	73	34,0	18,0

Tab. 4.17: Bearbeitung der Mikrowelten - Streuung der Daten

Wenn man die langen Orginalprotokolle zugrunde legt, dann ergibt sich für zstrich0 folgendes Bild:

		Aufgabenzahl			
	N	min.	max.	Mittelwert	Std.Abw.
zstrich0	184	2	173	41,8	31,1

Tab. 4.18: Orginalprotokoll zstrich0 - Streuung der Daten

Obwohl 12 Kinder über 100 Aufgaben bearbeitet haben, liegen die statistischen Kennwerte kaum über denen der Kurzprotokolle. Trotz der Beschränkung auf 99 ausgewertete Aufgaben bei den Kurzprotokollen wird die Arbeit der Kinder damit in der Mikrowelt zstrich0 hinreichend abgebildet.

Die Darstellung der Anzahlen im folgenden Boxplot macht die Verteilung der Daten noch deutlicher, als in Tab. 4.17.

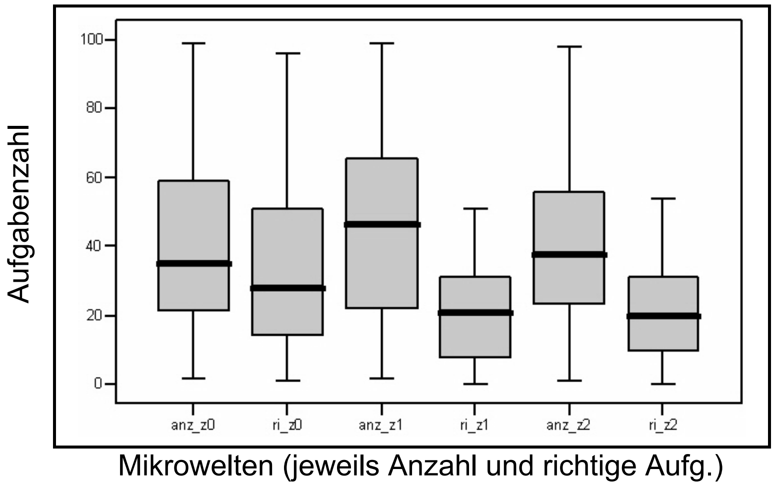


Abb. 4.13: Bearbeitung der Mikrowelten - Streuung der Daten

Es fällt auf, dass die Anzahlen richtiger Lösungen bei den Mikrowelten zstrich1 (z1) und zstrich2 (z2) deutlich abnehmen. Dies mag daran liegen, dass in diesen beiden letzten Mikrowelten (z1, z2) mit wechselnden Skalierungen gearbeitet werden musste.

Ein Mittelwertvergleich mit Hilfe des t-Tests zeigt zwar für alle Gruppen Varianzenhomogenität ($F<0,9$) aber keine signifikanten t-Werte ($t<1,4$), also keine Zusammenhänge zwischen den untersuchten Gruppen. Die nahezu gleiche Verteilung bei den richtigen Lösungen in zstrich1 und zstrich2 lässt sich aus der gleichen Struktur der Mikrowelten begründen. Wer mit der wechselnden Skalierung zurechtkommt, einen brauchbaren mentalen Zahlenstrahl hat und die gesuchte Zahl im Bereich 0 bis 20 findet, kann dies auch ohne Hilfe durch die Zusatzmarkierung bei 10 (wie in zstrich1). Die fehlende Zusatzmarkierung kann dann selbst mental in die Mitte zwischen 0 und 20 konstruiert werden.

Darauf weisen die Korrelationen zwischen den falschen bzw. richtigen Lösungen in den verschiedenen Mikrowelten hin.

	falsche Lösungen		richtige Lösungen	
zstrich0	,248**	,518**	,447**	*,235*
zstrich1		,585**		,531**
	zstrich1	zstrich2	zstrich1	zstrich2

** Korrelation ist signifikant auf dem 0.01 Niveau.

Tab. 4.19: Falsche/richtige Lösungen in den Mikrowelten - Korr

Auch die entsprechenden Korrelationen zwischen der Anzahl der richtigen bzw. falschen Lösungen in den drei Mikrowelten sind höchst signifikant:

Wer die Aufgaben in zstrich1 falsch bzw. richtig bearbeitet hat, hat meist auch die Aufgaben in zstrich2 falsch bzw. richtig bearbeitet. Erfolgreiche und wenig erfolgreiche Bearbeitungen der verschiedenen Mikrowelten sind über die Zeit relativ stabil.

Dasselbe gilt für die Anzahl bearbeiteter Aufgaben:

	bearbeitete Aufgaben	
zstrich0	,466**	,408**
zstrich1		,624**
	zstrich1	zstrich2

** Korrelation ist signifikant auf dem 0.01 Niveau.

Tab. 4.20: Anzahl bearbeiteter Aufgaben - Korr

Obwohl die Anzahl der bearbeiteten Aufgaben über einen weiten Bereich variiert, kann man festhalten, dass die Kinder die in der ersten Mikrowelt viele Aufgaben bearbeitet haben, dies dann auch in den anderen beiden Mikrowelten machen. Die Motivation zur Arbeit am Computer trägt bei diesen Kindern über einen relativ langen Zeitraum. Umgekehrt kann man aber ebenso schließen, dass es schon in der ersten Klasse Kinder gibt, die die Arbeit am Computer uninteressant finden und deshalb nur kurze Zeit in den Mikrowelten arbeiten. Diese Kinder bearbeiten dabei nur wenige Aufgaben.

- *Diejenigen Kinder, die viele Aufgaben richtig bearbeiten, tun dies in allen drei Mikrowelten.*
- *Kinder, die wenige Aufgaben bearbeiten, machen in allen drei Mikrowelten dabei häufiger Fehler.*

Vergleich der Bearbeitungszeiten

Die Bearbeitungszeiten zeigen eine ähnlich breite Verteilung wie die Anzahl der bearbeiteten Aufgaben. In den Orginaldaten liegen die gemessenen Zeiten für die Arbeit in einer Mikrowelt im Durchschnitt bei 1118 (gemessen wurde mit dem `time`-Befehl von LOGO in Zehntelsekunden, wobei die Ergebnisse je nach Prozessortyp leicht abweichen). Eine Zeit von 1118 entspricht ungefähr 120 Sekunden oder zwei Minuten. Die kürzeste Gesamtbearbeitung dauerte vier Sekunden, die längste 2067 Sekunden oder rund 35 Minuten. Die durchschnittliche Zeit pro Aufgabe lag bei drei Sekunden.

In den Kurzdateien, in denen die Strategien gesucht wurden, sind alle Werte entsprechend kleiner. Man sieht aber auch hier, dass die Streuung zunimmt, was wahrscheinlich wieder auf die anspruchsvolleren Mikrowelten zstrich1 und zstrich2 zurückgeführt werden kann.

		Zeit pro Aufgabe			
	N	min.	max.	Mittelwert	Std.Abw.
zstrich0	180	1,3	77	11,6	10,2
zstrich1	129	1	114	8,3	12,3
zstrich2	64	1	116	9,5	15,5

Tab. 4.21: Bearbeitungszeiten - Streuung der Daten

Zusammenhänge zwischen der Anzahl der bearbeiteten Aufgaben in den drei Mikrowelten (Anzahl z..) und der durchschnittlichen Zeit pro Aufgabe (dzeit) können durch folgende Korrelationen (Rangkorrelation n. Spearman) belegt werden:

	dzeit z0	dzeit z1	dzeit z2
Anzahl z0	-,520**		
Anzahl z1		-,426**	
Anzahl z2			-,537**

** Korrelation ist signifikant auf dem 0.01 Niveau.

Tab. 4.22: Bearbeitete Aufgaben und Zeit pro Aufgabe - Korr

Diejenigen Kinder, die viele Aufgaben bearbeiten brauchen in allen Mikrowelten pro Aufgabe wenig Zeit. Auch bei den richtigen Lösungen findet man diesen Zusammenhang mit der Zeit. Wer die Lösung in kurzer Zeit findet, der hat viele richtige Lösungen:

	dzeit z0	dzeit z1	dzeit z2
richtig z0	-,548**		
richtig z1		-,429**	
richtig z2			-,521**

Tab. 4.23: Richtige Aufgaben und Zeit pro Aufgabe - Korr

Für die falschen Lösungen findet man keine entsprechenden signifikanten Zusammenhänge.

- *Die Anzahl der bearbeiteten Aufgaben korreliert signifikant mit kurzen durchschnittlichen Bearbeitungszeiten.*
- *Kinder, die in den Mikrowelten die Lösungen schnell finden haben auch viele richtige Lösungen.*

4.3.2 Strategien in den Mikrowelten

Die einzelnen Kinder arbeiteten in den verschiedenen Mikrowelten mit unterschiedlichen Strategien. Der Prozess der Strategieerkennung und die verschiedenen Strategietypen wurden oben unter 3.3.3 dargestellt. Eine vollständige

Darstellung der Strategien für die Aufgaben 0 bis 99 findet man in *Anlage D2*, exemplarisch dargestellt für zstrich0.

Im Folgenden werden zunächst die einzelnen Strategien in den drei Mikrowelten quantitativ in einer Tabelle und zusammengefasst in einem Boxplot dargestellt. Weiter werden Zusammenhänge zwischen den einzelnen Strategien untersucht.

Die Strategien sind wie folgt bezeichnet: strat<Strategienummer><Mikrowelt>

So ist z.B. *strat00* Strategie 0 in Mikrowelt zstrich0 oder *strat31* Strategie 3 in Mikrowelt zstrich1.

Verteilung der Daten

In Tab. 4.24 sind die gezählten Strategien der Kinder in den einzelnen Mikrowelten dargestellt.

Die Übersicht der aufsummierten Strategien, jeweils über alle Aufgaben in den Mikrowelten, zeigt, dass die Verwendung der Strategien in den Mikrowelten im Verhältnis relativ konstant ist. Die Anzahl nicht erkannter Strategien (strat00, strat01 und strat02) liegt bei ca. 25%. Die Mehrzahl der Strategien können zugeordnet werden. Am häufigsten, mit ca. einem Drittel der gewählten Strategien wird Strategie 3 gewählt.

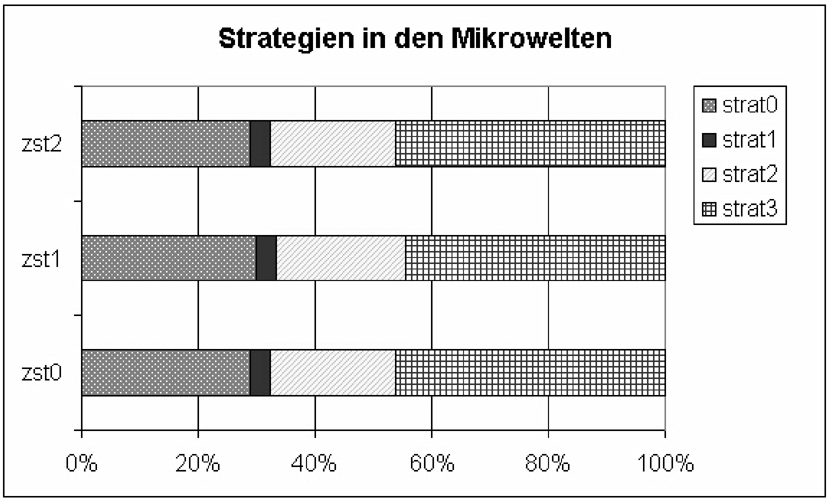


Abb. 4.14: Strategien - Häufigkeiten summiert (%)

Wenn man die absoluten Anzahlen für die gewählten Strategien bezogen auf die einzelnen Kinder betrachtet, stellt sich diese im Streifendiagramm zunächst ähnliche Entwicklung differenzierter dar. Tab. 4.24 und die folgende

Darstellung der Boxplots (Abb. 4.13 s.u.) zeigen beide deutlich, wie sich die einzelnen Strategien unterschiedlich entwickeln.

		n	Minimum	Maximum	Mittelwert	Std. Abw.
zstrich0	strat00	177	0	37	11,80	8,51
	strat10	177	0	9	1,38	1,86
	strat20	177	0	33	8,75	5,73
	strat30	177	0	69	18,85	15,34
zstrich1	strat01	132	0	46	11,92	9,68
	strat11	132	0	1	,17	,381
	strat21	132	0	9	2,63	2,26
	strat31	132	0	71	33,14	18,36
zstrich2	strat02	64	0	46	13,84	9,35
	strat12	64	0	1	,25	,436
	strat22	64	0	10	2,16	2,32
	strat32	64	0	62	25,05	15,5

Tab. 4.24: Strategien in den Mikrowelten - Anzahlen

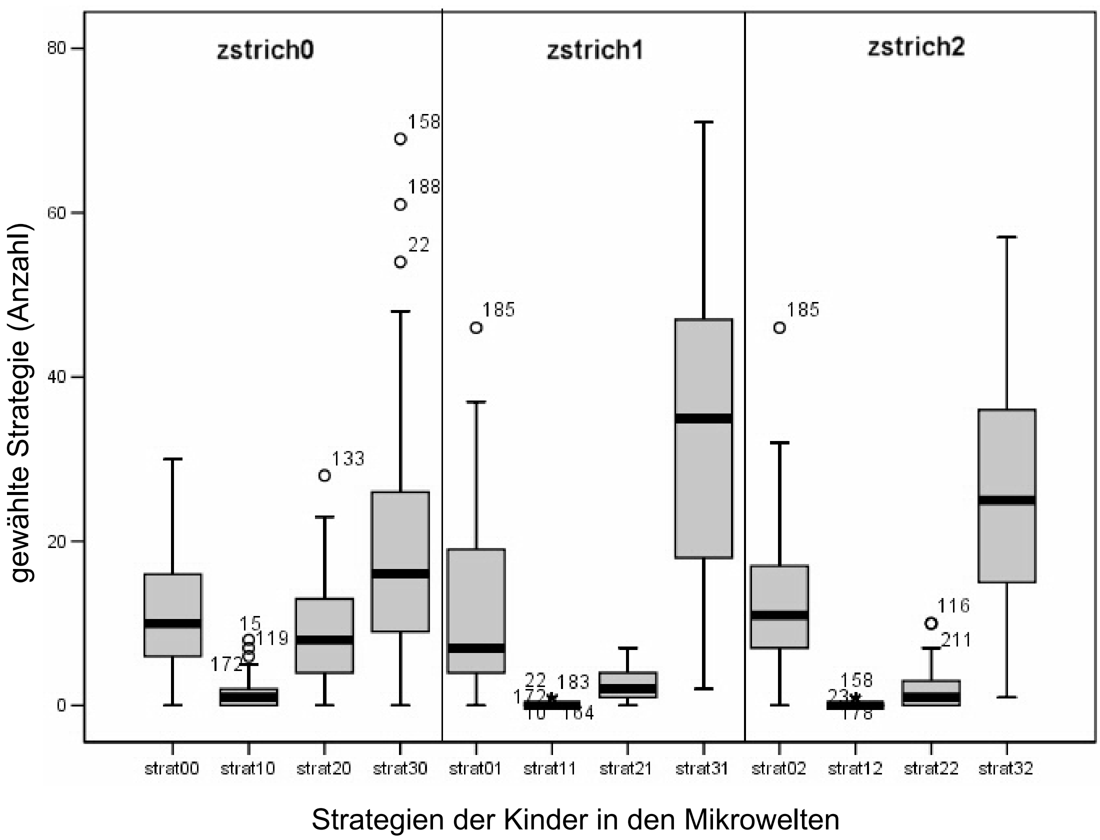


Abb. 4.15: Strategien in den Mikrowelten - Boxplot

Strategie 1 (Suche ab 0) wird nur in der Mikrowelt zstrich0 (strat10) etwas häufiger gewählt. In den Mikrowelten zstrich1 und zstrich2 kommt diese Strategie (strat11, strat12) selten vor.

Bei Strategie 2 (Suche ab der Vorgabezahl) kann man beim Übergang zu Mikrowelt zstrich1 eine starke Abnahme erkennen (strat20, strat21). Während in Mikrowelt zstrich0 die Markierung bei der Vorgabezahl genutzt wird, verschwindet in der nächsten Mikrowelt diese Strategie (Suchen ab Vorgabe) dann nahezu (strat21), da die Kinder selbst entscheiden müssen ob Sie ab 0 oder ab 10 suchen. Die Kinder gehen eher dazu über, die Zahlen direkt zu suchen. Dieser Zwang zur Direktsuche könnte außerdem für den hohen Anteil nicht erkannter Strategien (strat01) verantwortlich sein. Es fällt aber auch auf, dass die Kinder nun nicht mehr auf die Minimalstrategie (Strategie 1: Zählen ab 0) zurückgreifen, sondern wahrscheinlich zu Strategie 3 übergehen.

Strategie 3 (direkt zur Zahl) nimmt über die beiden ersten Mikrowelten zu (strat30, strat31). Offensichtlich ist die Strukturierung des Zahlenraums durch (0, 10, 20) eine gute Orientierung für die Direktsuche der Zahl. In der letzten Mikrowelt muss man eine leichte Abnahme registrieren (strat31, strat 32). Im Vergleich mit der ersten Mikrowelt ergibt sich aber trotzdem noch ein besserer Wert. Die Zunahme über alle drei Mikrowelten zeigt auch, dass sich im Lauf des Schuljahrs die Zahlvorstellung und die Fähigkeit am mentalen Zahlenstrahl zu operieren, bei den Kindern natürlich weiterentwickelt. Lerneffekte treten auf, unabhängig von der Arbeit in den Mikrowelten.

- *Kinder wählen im Durchschnitt beim Bearbeiten der drei Mikrowelten im Laufe des Schuljahres immer häufiger die Direktstrategie 3.*
- *Die in Mikrowelt zstrich2 angebotene Orientierung an 10 wirkt sich positiv auf die häufige Auswahl von Direktstrategien aus.*

Strategien, richtige und falsche Lösungen - Korrelationen

Diese eben beschriebenen Zusammenhänge stellen sich ebenso in den Korrelationen zwischen den einzelnen Strategien dar:

	strat30	strat31
strat31	,479**	
strat32	,346**	,627**

Tab. 4.25: Wahl der Direktstrategie

Diejenigen Kinder, die häufig Direktstrategien (strat3x) auswählen tun dies signifikant in allen 3 Mikrowelten. Auch hier sieht man zwischen den

Direktstrategien in den ähnlichen Mikrowelten zstrich2 und zstrich3 wieder die höchste Korrelation.

Die Entscheidung für Strategie 2 (ab Vorgabe) ist in allen Mikrowelten relativ stabil (strat20, strat21, strat22). Kinder die in Mikrowelt zstrich1 häufig Strategie 2 (ab Vorgabe) gewählt haben (strat21), wählen in zstrich2 die Direktstrategie (strat21 .. strat32):

	strat20	strat21
strat21	,341**	
strat22	,464**	,444**
strat32	,280*	,404**

Tab. 4.26: Übergang zu Direktstrategie - Korr.

Auch die Daten der Kinder, die in allen drei Mikrowelten häufig Strategien gewählt haben, die nicht erkannt werden (Strategie 0), zeigen signifikante Werte zwischen zstrich0 und zstrich1 sowie zwischen zstrich1 und zstrich2:

	strat00	strat01
strat01	,415**	
strat02	0,25	,639**

Tab. 4.27: Nicht erkannte Strategien - Korr.

- *Kinder die eher die Direktstrategie 3 wählen, tun dies signifikant häufig in allen drei Mikrowelten.*
- *Bei vielen Kindern kann man beim Übergang von zstrich1 zu zstrich2 einen Wechsel von Strategie 2 (ab Vorgabe) zur Direktstrategie 3 beobachten.*
- *Die Auswahl nicht erkannter Strategien beim Durcharbeiten der Mikrowelten ist bei bestimmten Kindern signifikant.*

Lerneffekte in den Mikrowelten

Die bei den Häufigkeiten beobachtetet Zunahme von Strategie 3 in den Mikrowelten, die als Lerneffekt über das Schuljahr interpretiert wurde, wird untermauert durch Lerneffekte, die man während der Bearbeitung einer Mikrowelt beobachten kann. Auch innerhalb eines Bearbeitungszyklus werden die Kinder immer sicherer, haben mehr richtige Lösungen und wenden Strategie 3 sicherer an, was darauf hindeutet, dass die mentale Zahlvorstellung sich verbessert. Die folgenden Korrelationen wurden für die Mikrowelt zstrich0 berechnet. Es werden immer die Daten aus den ersten 30 bearbeiteten Aufgaben (Aufgabenblock 1) mit den Daten der folgenden 30 Aufgaben (Aufgabenblock 2) verglichen.

n=180	Aufgabenblock 1	Aufgabenblock 2
richtig (z0) - Strategie 1	-,213**	,303**
richtig (z0) - Strategie 2	,307**	,825**
richtig (z0) - Strategie 3	,751**	,896**

Tab. 4.28: Aufgabenblöcke - Lerneffekte Strategien - Korr

Im Vergleich mit der Summe der richtigen Lösungen in zstrich0 zeigt sich in Tab. 4.28 für alle Strategien, dass diese im Aufgabenblock 2 sicherer angewendet werden - es werden mehr richtige Lösungen konstruiert. Während die häufige Anwendung von Strategie 1 im Aufgabenblock 1 eher weniger richtige Lösungen produziert (r= -0,213**), zeigt sich für den Aufgabenblock 2 eine schwache, positive, aber hoch signifikante Korrelation (r=0,303**) zur Anzahl richtiger Lösungen. Die Anwendung von Strategie 2 zeigt eine gleichfalls positive Entwicklung im Aufgabenblock 2. Bei Strategie 3 fällt der Zuwachs geringer aus. Diejenigen Kinder, die Strategie 3 anwenden haben schon einen relativ guten mentalen Zahlenstrahl, was sich in der hohen Korrelation (r=0,751**) im Aufgabenblock 1 zeigt. Trotzdem kann man auch hier noch eine leichte Steigerung (r=0,898**) feststellen.

Die Aussage, dass sich eine Verbesserung in der Anwendung der mentalen Zahlvorstellung während der Arbeit in den Mikrowelten ergibt, wird durch die folgende Tabelle weiter gestützt.

n=180	Aufgabenblock 1: richtige Lösungen	Aufgabenblock 2: richtige Lösungen
richtige Lösungen (alle Aufg.)	,832**	,912**
falsche Lösungen (alle Aufg.)	,832**	,614**
Strategie 3	,783**	,907**

Tab. 4.29: Aufgabenblöcke - richtige Lösungen - Korr.

Im Vergleich mit den richtigen Lösungen der Gesamtbearbeitung zeigt sich eine Steigerung im Aufgabenblock 2, während bei den falschen Lösungen eine deutliche Abnahme (r=0,832** ... r=0,614**) zu verzeichnen ist. Auch die Anwendung von Strategie 3 (direkt) nimmt zu (r=0,783** ... r=0,907**).

- *In Mikrowelt zstrich0 lassen sich im Laufe der Bearbeitung Lerneffekte nachweisen. Die Anzahl richtiger Lösungen nimmt bei allen Strategien zu und falsche Lösungen werden seltener.*

4.3.3 Strategien und Arbeitsstil der Kinder

Interessanter als die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Strategien sind aber Zusammenhänge zwischen den Strategien und den anderen, die Arbeit der Kinder in den Mikrowelten beschreibenden Variablen. Entsprechende Fragesstellungen, die sich aus den vorliegenden Daten ergeben können, sind z.B.:

Gibt es Zusammenhänge zwischen Strategiewahl und

- der Anzahl bearbeiteter Aufgaben, denn das heißt, dass bestimmte Strategien effektiver sind.
- der Anzahl richtig bzw. falsch gelöster Aufgaben, was bedeutet, dass die verschiedenen Strategien unterschiedlich gut sind.
- den Durchschnittszeiten pro Aufgabe aus den Kurzprotokollen, denn das heißt, dass bestimmte Strategien einhergehen mit der schnellen Aktivierung der mentalen Zahlvorstellung.
- der maximalen Differenz zur gesuchten Zahl während der Suche, woraus man schließen kann, dass die Entscheidung für bestimmte Strategien abhängig ist vom einer genauen oder weniger guten mentalen Zahlvorstellung.

Strategiewahl und Aufgabenzahl sowie richtige und falsche Lösungen

Kinder, die häufig Strategie 3 wählen, haben in allen drei Mikrowelten viele Aufgaben bearbeitet. Ein gegenteiliger Effekt für Strategie 1 lässt sich nicht nachweisen:

	Anzahl z0	Anzahl z1	Anzahl z2
strat10	*0,043*		
strat30	,922**		
strat11		-,203*	
strat31		,948**	
strat12			*-0,058*
strat32			,971**

* Korrelation ist signifikant auf dem 0.05 Niveau.
** Korrelation ist signifikant auf dem 0.01 Niveau.

Tab. 4.30: Anzahl Aufgaben und Strategien- Korr.

Wenn man weiter danach differenziert, ob die gesuchte Zahl gefunden wurde oder nicht, dann zeigt sich ebenfalls, dass die Kinder, die Strategie 3 wählen erfolgreicher sind. Die Tabelle der Korrelationen zeigt folgendes deutliches Bild:

n=177	richtig z0	falsch z0	richtig z0%
strat00	,793**	,497**	*-,023*
strat10	*0,007*	,262**	-,209**
strat20	,767**	,331**	*,106*
strat30	,939**	275**	,243**

** Korrelation ist signifikant auf dem 0.01 Niveau.

Tab. 4.31: Richtige / falsche Aufgaben und Strategien - Korr.

In Mikrowelt zstrich0 haben diejenigen Kinder viele Aufgaben richtig, die Strategie 2 oder Strategie 3 bevorzugen (strat20 .. richtig z0 und strat 30 .. richtig z0). Es gibt keinen Hinweis, dass Kinder, die häufig Strategie 1 wählen, damit zum Erfolg kommen (strat10 .. richtig z0). Auch die Kinder, deren Strategie nicht erkannt wurde, haben die Aufgaben häufig richtig gelöst (strat00 .. richtig z0). Hier ist aber auch die Chance, dass eine falsche Lösung konstruiert wird, realtiv groß (strat00 .. falsch z0). Kinder, die häufig Strategie 3 benutzen, finden die gesuchte Zahl eigentlich immer (strat30 .. richtig z0 und strat30 .. falsch z0). Wenn man bei der Auswertung den prozentualen Anteil richtiger Lösungen berücksichtigt, wird noch klarer, dass Strategie 1 nicht die zielführende Strategie ist (strat10 ... richtig z0%).

In den anderen beiden Mikrowelten, zstrich1 und zstrich2, ist die Situation nicht so klar:

	richtig z1	richtig z2	falsch z1	falsch z2
strat01	,805**		,894**	
strat11	-,088*		-,119*	
strat21	,810**		,656**	
strat31	,946**		,813**	
strat02		,805**		,842**
strat12		*-0,57*		*-0,127*
strat22		,620**		,555**
strat32		,961**		,682**

* Korrelation ist signifikant auf dem 0.05 Niveau.
** Korrelation ist signifikant auf dem 0.01 Niveau.

Tab. 4.32: Richtige / falsche Aufgaben und Strategien - Korr.

Hier werden bei der Auswahl fast aller Strategien (Ausnahme Strategie 1) mit hoher Wahrscheinlichkeit sowohl richtige als auch falsche Lösungen konstruiert. Aber auch hier erzeugt der häufige Gebrauch der Direktstrategie (strat3x) mit hoher Wahrscheinlichkeit richtige Lösungen.

- *Kinder die häufig Strategie 3 wählen, bearbeiten in allen Mikrowelten eine größere Anzahl Aufgaben.*

▾ *Bei der Wahl von Strategie 1 lässt sich kein Zusammenhang mit richtigen Lösungen nachweisen, sehr wohl aber bei den Strategien 2 und 3.*

Strategiewahl und Durchschnittszeit pro Aufgabe

Die Untersuchung der Durchschnittszeiten pro Aufgabe und der gewählten Strategien bringt wie erwartet ähnliche Zusammenhänge:

	dzeit z0	dzeit z1	dzeit z2
strat00	-,382**		
strat10	*0,56*		
strat20	-,348*		
strat30	-,528**		
strat01		-,330*	
strat11		*0,121*	
strat21		-,306*	
strat31		-,378**	
strat02			-,528**
strat12			*-0,003*
strat22			*-0,174*
strat32			-,520**

Tab. 4.33: Durchschnittszeit pro Aufgabe und Strategien - Korr.

▾ *Kinder, die häufig Strategie 3 wählen, haben in allen 3 Mikrowelten sehr kurze durchschnittliche Bearbeitungszeiten pro Aufgabe.*

Strategiewahl und maximale Abweichung von der gesuchten Zahl

Für alle Kinder wurde auch für jede Aufgabe die maximale Abweichung von der gesuchten Zahl während der Suche berechnet. Wenn man die Durchschnittswerte der einzelnen Kinder über alle Aufgaben (maxd) in den drei Mikrowelten in Korrelation mit anderen Variablen setzt, ergeben sich die folgenden Zusammenhänge:

- Zwischen den einzelnen Mikrowelten ergibt sich für die Werte von maxd nur zwischen zstrich0 und zstrich1 eine geringe, aber hoch signifikante Korrelation (r=0,245**).

Innerhalb der einzelnen Mikrowelten findet man folgende weitere Zusammenhänge:

n=182	strat00	strat10	strat20	strat30	richtig	falsch	schritte	klicks	anzahl
maxd0	,430**	,207**	,187*	*0,008*	*0,097*	,431**	,323**	,376**	,231**

Tab. 4.34: Abweichung von der gesuchten Zahl (zstrich0) - Korr.

- In zstrich0 haben diejenigen Kinder im Durchschnitt große Abweichungen, die häufig Strategie 1 (Zählen ab 0) wählen, oder eine Strategie, welche nicht erkannt wird (strat00). Außerdem haben diese Kinder eine größere Anzahl falscher Lösungen und brauchen viele Schritte und Klicks bei der Bearbeitung.

Ein ähnliches Bild bietet sich in der Mikrowelt zstrich1:

n=132	strat01	strat11	strat21	strat31	richtig	falsch	anzahl
maxd1	*0,519***	*-0,044*	*,227***	*0,052*	*-0,159*	*,347***	*,218**

Tab. 4.35: Abweichung von der gesuchten Zahl (zstrich1) - Korr.

- Die Kinder mit großen Abweichungen von der gesuchten Zahl wählen auch hier häufig Strategie 0 oder Strategie 2 und produzieren auch eher falsche Lösungen.

Die Daten der letzten Mikrowelt zeigen, wie schon die Auswertungen vorher, ein sehr uneinheitliches Bild und keine signifikanten Zusammenhänge.

▾ *Kinder, die bei ihren Bearbeitungen eine große durchschnittliche Abweichung von der gesuchten Zahl zeigen, wählen eher Strategie 1 und produzieren eher falsche Lösungen.*

Strategiewahl und Zeit bis zum ersten Klick

Für die Mikrowelt zstrich0 wurde außerdem noch die Zeit bis zum ersten Klick gemessen. Da in dieser Mikrowelt die Vorgabe mit jeder Aufgabe variiert, sollte die Zeit, die das Kind braucht um, sich in der Mikrowelt zu orientieren und seinen mentalen Zahlenstrahl aufzubauen, eine brauchbare Variable für Aussagen über den Entwicklungsstand des mentalen Modells der Kinder sein. Das mehr oder weniger elaborierte mentale Modell der Kinder bestimmt dann auch die Strategie, mit der das Kind versucht, die gestellte Aufgabe zu lösen. Dabei konkurrieren die verschiedenen möglichen Strategien und die Kinder übergeneralisieren häufig, versuchen also alle Aufgaben mit derselben Strategie zu lösen, weil sie noch zu wenig konzeptuelles Verständnis haben [vgl. STERN 1992, 102ff.]. In der Mikrowelt zstrich0 können-gen folgende Zusammenhänge mit der Durchschnittszeit bis zum ersten Klick (eklick_d) nachgewiesen werden (n=182):

- Die häufige Nutzung von Strategie 1 (ab Null) korreliert positiv mit der Zeit bis zum ersten Klick (r=0,281**).
- Diese Kinder, die lange brauchen um sich zu orientieren (eklick_d ist groß), wählen seltener Strategie 2 (r= -0,394**) oder Strategie 3 (r= -0,604**).
- Im Endeffekt führt dies dazu, dass diese Kinder in zstrich0 weniger Aufgaben bearbeiten (r= -0,517**) und auch seltener zu richtigen Lösungen kommen (r= -0,564**).

Diese negativen Einflüsse lassen sich sogar noch beim Arbeiten in der zweiten Mikrowelt nachweisen. Diese Kinder mit der wenig entwickelten mentalen Zahlvorstellung, die lange brauchen um sich zu orientieren, wählen auch in zstrich1 seltener Strategie 2 (r= -0,231*) und Strategie 3 (r= -0,309**; n=120).

▾ *Kinder, die bis zum ersten Klick viel Zeit brauchen, wählen nicht Strategie 3, bearbeiten nicht viele Aufgaben und konstruieren eher selten richtige Lösungen.*

4.3.4 Besonderheiten bei den Aufgaben in den Mikrowelten

Neben der Auswertung nach Personen wurden auch die transponierten Matrizen für die Auswertung nach Aufgaben herangezogen. Die zu suchenden Zahlen in den drei Mikrowelten waren in ihrer Abfolge gleich (siehe *Anlage C1*), es wurden lediglich die Vorgabezahl und die Skalierung variiert. Trotzdem wurden die Aufgaben in den verschiedenen Mikrowelten z.T. sehr unterschiedlich bearbeitet.

Bei den Aufgaben lassen sich wieder Zusammenhänge zwischen den gewählten Strategien, zwischen dem Abstand Vorgabezahl - gesuchte Zahl, der Schrittzahl bis zur Lösung, der Zeit bis zum ersten Klick und der richtigen bzw. falschen Lösung nachweisen.

	strat00	strat10	strat20	strat30	strat01	strat11	strat21	strat31
strat01	,568**							
strat11		,335**						
strat21			,502**					
strat31				,398**				
strat02	,613**				,802**			
strat12		*-0,079*				*0,091*		
strat22			,228*				*0,272*	
strat32				,550**				,856**

Tab. 4.36: Strategien bei den Aufgaben - Korr.

Die Tabelle zeigt im oberen Quadranten, dass die Aufgaben in den Mikrowelten zstrich0 und zstrich1 häufig mit denselben Strategien gelöst wurden. Beim Übergang zu zstrich3 spielen dann Strategie 1 und Strategie 2 keine Rolle mehr (Quadranten unten). Strategie 2 (ab Vorgabezahl) wird aber in den Mikrowelten zstrich0 und zstrich1 häufig gebraucht (strat20 .. strat21). Seltener wird bei Aufgaben die Zählstrategie 1 genutzt (strat10 .. 11). Strategie 3 kommt in allen drei Mikrowelten bei denselben Aufgaben häufig vor. Die hohe Korrelation bei Strategie 3 zwischen zstrich1 und zstrich2 (strat31 .. strat 32) ergibt sich aus den ähnlichen Mikrowelten. Auch die nicht erkannten

Strategien (Strategie 0) treten in allen drei Mikrowelten bei denselben Zahlen auf.

Die weitere, genauere Analyse der Daten aus Mikrowelt zstrich1 zeigt folgende Zusammenhänge:

- Wenn die gesuchte Zahl oder der Abstand zwischen Vorgabezahl und gesuchter Zahl groß ist, dann werden häufiger falsche Lösungen konstruiert (abstand: r=0,339**; gesucht: r=0,432**).
- Aufgaben bei denen die Vorgabezahl groß ist werden häufiger mit Strategie 3 gelöst (r=0,302**) und selten mit Strategie 1 (r= -0,294**). Umgekehrt kann man schließen, dass bei Aufgaben mit kleinen Vorgabezahlen eher ab Null gezählt wird.
- Wenn die gesuchte Zahl groß ist wird selten mit Strategie 3 gesucht (r= -0,337**), man greift statt dessen auf Strategie 1 (r=0,207*) oder Strategie 2 (r=0,341**) zurück.
- Dasselbe gilt für Aufgaben, bei denen der Abstand zwischen Vorgabe und gesuchter Zahl groß ist (strat3: r= -0,466**; strat1: r=0,332**; strat2: r=0,292**).
- Wenn die gesuchte Zahl oder der Abstand zur Vorgabe groß sind, dann werden die Aufgaben mit vielen Bearbeitungsschritten gelöst (gesucht: r=0,510**; abstand: r=0,317**).
- Ein großer Abstand zur Vorgabezahl führt außerdem zu einer langen Bearbeitungszeit (r=0,266**), während eine große Vorgabezahl, die ja dann meist nahe bei der gesuchten Zahl ist, die Bearbeitungszeit verkürzt (r= -0,222*).
- Ein großer Unterschied zwischen Vorgabezahl und gesuchter Zahl führt auch dazu, dass der erste Klick auf die gesuchte Zahl in der Regel zu kurz gesetzt wird. Der Abstand Vorgabezahl - erster Klick ist dann eher klein (r= -0,238*) und der Abstand erster Klick - gesuchte Zahl ist eher groß (r= 0,543**).
- Derselbe Effekt tritt ein, wenn die gesuchte Zahl groß ist. Auch dann ist der Abstand zwischen erstem Klick und der gesuchten Zahl groß (r= 0,663**).

Dieser letztgenannte Effekt lässt sich auch in den Daten der Mikrowelten zstrich1 und zstrich2 nachweisen:

	Abstand erster Klick - gesuchte Zahl
gesucht1	,628**
gesucht2	,695**

Tab. 4.37: Abstand erster Klick (zstrich1,zstrich2) - Korr.

Außerdem lassen sich in den Daten dieser beiden Mikrowelten weitere, den oben gemachten Aussagen entsprechende Zusammenhänge ablesen:

	strat0x	strat1x	strat2x	strat3x	richtig	falsch	schritte
gesucht1	,598**	*0,068*	,482**	,607**	-,506**	,550**	,223*
gesucht2	,575**	*-0,028*	*0,193*	**,-542****	-,464**	,506**	,278*

Tab. 4.38: Gesuchte Zahl und Strategiewahl (zstrich1,zstrich2) - Korr.

- Ausnahme: In zstrich2 wird Strategie 3 seltener gewählt, wenn die gesuchte Zahl groß ist (gesucht2 .. strat3). Ursache dafür könnte die fehlende Unterstützung durch die Vorgabezahl, bzw. durch die Anzeige von 10 sein. Bei diesen Aufgaben wird viel herumprobiert um die Lösung zu finden. Darauf deutet auch der hohe Wert bei strat0 hin.

Die Durchschnittszeit bis zum ersten Klick (eklick_d) beschreibt auch bei den Aufgaben interessante Zusammenhänge:

n=99	strat00	strat10	strat20	strat30	richtig	falsch
eklick_d	,630**	,433**	,297**	*0,135*	,305**	,655**

Tab. 4.39: Gesuchte Zahl und Strategiewahl (zstrich1,zstrich2) - Korr.

Die Aufgaben, bei denen die Durchschnittszeit bis zum ersten Klick groß ist, werden

- eher mit Strategie 0 oder Strategie 1 gelöst.
- seltener mit Strategie 2 bearbeitet.
- eher falsch als richtig gelöst.

Bei diesen Aufgaben ist außerdem die Anzahl der Bearbeitungsschritte hoch (r= 0,716**), ebenso der Abstand zwischen der gesuchten Zahl und dem ersten Klick (r=0,359**). Dies weist darauf hin, dass die Aufgaben, bei denen große Zahlen (r=0,371**) gesucht sind und der Abstand zwischen der Vorgabe und der gesuchten Zahl (r=0,303**) groß ist, mit einem ungenauen mentalen Modell bearbeitet wurden. Der mentale Zahlenstrahl der Kinder war für diese Aufgaben wohl nicht ausreichend.

- ▾ *Bei Aufgaben, bei denen die gesuchte Zahl groß ist, wird in allen drei Mikrowelten die Bearbeitung mit ungenauem ersten Klick, d.h. mit großem Abstand zur gesuchten Zahl begonnen.*
- ▾ *Aufgaben, bei denen die gesuchte Zahl groß ist, werden nur in Mikrowelt 1 mit Strategie 3 bearbeitet.*
- ▾ *Bei Aufgaben, bei denen der Abstand zwischen gesuchter Zahl und Vorgabezahl groß ist, wird der erste Klick in der Regel zu kurz gesetzt.*
- ▾ *Aufgaben, bei denen die Durchschnittszeit bis zum ersten Klick groß ist, werden eher falsch gelöst.*

4.4 Fallstudien

Die Fallstudien sollen zeigen, wie aussagekräftig die gesammelten Daten der einzelnen individuellen Konstruktionen in den verschiedenen Mikrowelten sind. Zur Darstellung der Fallstudien werden Visualisierungen der Bearbeitungsprotokolle einzelner Kinder genutzt. Da die bildliche Darstellung eines Arbeitsprotokolls statisch ist, wird diese jeweils durch Beschreibungstexte und in Einzelfällen durch Teilbilder ergänzt. Auf diese Weise soll vermittelt werden, was die Bearbeitungsprotokolle für die qualitative Analyse der Bearbeitungen einzelner Kinder leisten können. Die einzelnen Fallbeispiele sind verschiedenen Kategorien zugeteilt. Im Sinne einer qualitativen Inhaltsanalyse, die sich allerdings vorwiegend mit Textmaterial befasst (vgl. [MAYRING 2003]), wurden die Kategorien aus den Ablaufprotokollen und einzelnen Schülerbeobachtungen während der Arbeit in den Mikrowelten abgeleitet. Die visualisierten Ablaufprotokolle einzelner Kinder sind in diesem Kontext dann die Ankerbeispiele, welche die Kategorien beschreiben und veranschaulichen sollen. Die individuellen Bearbeitungen einzelner Kinder wurden nach folgenden Kennzeichen kategorisiert:

- Zählstrategien ab Null
- Suche ab der Vorgabezahl
- Direktstrategien
- Zahlsuche durch Klicken
- Strategiewechsel während der Suche
- Pausen während der Suche
- Suche ohne Strategie
- Lernen während der Bearbeitung

Am Ende dieses Kapitels sind noch vier Kinder und deren Bearbeitungen in mehreren verschiedenen Mikrowelten dargestellt.

Um die Visualisierungen nicht mit Informationen zu überfrachten, werden die verschiedenen Mikrowelten nicht in der Sicht der Kinder, die gerade die Aufgabe bearbeiten, dargestellt, sondern schematisiert mit Hilfsskalierungen, welche die Kinder nicht haben. Die Orginalansichten der Mikrowelten sind in 3.2.5 (Arbeiten in den Mikrowelten) dargestellt. Der Ausgangspunkt 0 ist immer eingezeichnet und es wird immer die gesuchte Zahl (Beisp.: g=8) seitlich angezeigt. Die Mikrowelten unterscheiden sich in folgenden Punkten:

- zstrich0: nur die Strecke zwischen 0 und v (Vorgabezahl) ist eingezeichnet, 0 und v werden notiert, die Skalierung (Schrittweite des Igels) ist immer gleich.
- zstrich1: die Strecke zwischen 0 und 20 ist eingezeichnet, mit einer Zwischenmarkierung bei 10; andere, wechselnde Skalierung, nicht wie bei zstrich0.
- zstrich2: die Strecke zwischen 0 und 20 ist eingezeichnet; Skalierung wie bei zstrich1.

Für die Fallstudien werden folgende Darstellungen verwendet:

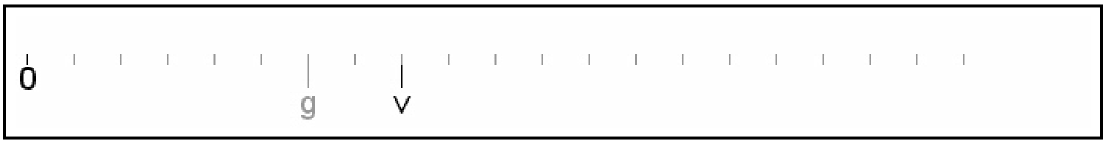


Abb. 4.16: Mikrowelt zstrich0 (Bsp.: Aufgabe 5)

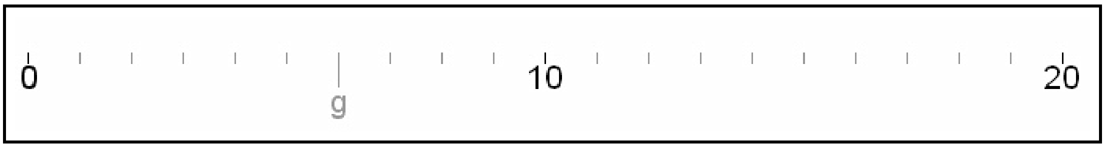


Abb. 4.17: Mikrowelt zstrich1 (Bsp.: Aufgabe 5)

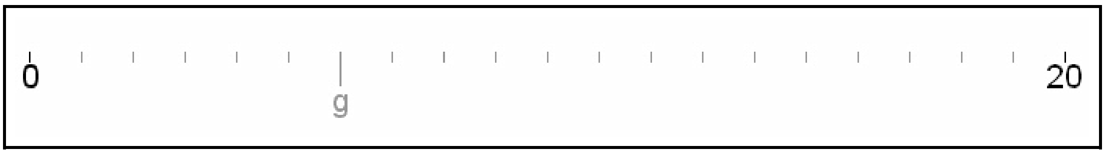


Abb. 4.18: Mikrowelt zstrich2 (Bsp.: Aufgabe 5)

Die grau eingezeichneten Skalierungen und die Markierung der gesuchten Zahl (g) sehen die Kinder bei ihrer Bearbeitung nicht.

Alle, für die Visualisierungen verwendeten Beispiele, stammen aus den Bearbeitungen der folgenden Aufgaben:

- Aufgabe 5 (a5): Vorgabe 0 bis 8; gesucht: 6 (vgl. 3.3.3)
- Aufgabe 12 (a12): Vorgabe 0 bis 10; gesucht: 5 (vgl. 3.3.3)
- Aufgabe 28 (a28): Vorgabe 0 bis 8; gesucht: 6 (identisch mit Aufgabe 5)

Beispiel für eine Bearbeitung

Das folgende Beispiel zeigt das visualisierte und kommentierte Protokoll einer kurzen Bearbeitungssequenz. Zusätzlich wird die Konstruktion durch einen Text beschrieben und es wird kurz die vermutetet Strategie benannt. Falls die

Grafik der Bearbeitungssequenz zu unübersichtlich ist, wird diese in Teilbilder aufgespalten.

Daten z5-008

Das folgende Beispielprotokoll beschreibt die Arbeit eines Jungen (Proband 008: 7 Jahre). Der Junge hat einen Computer zuhause (ch), aber keinen eigenen Computer (ce). Er erreichte in der Schlussuntersuchung (su) 33 Punkte (oberes Quartil). Bei der Eingangsuntersuchung (eu) und der Einführungsstunde (es) waren die Leistungen eher durchschnittlich (22 und 18 Pkte.). Am Ende von Klasse 2 (n2) hatte der Junge in Mathematik die Note gut (2). Diese Daten werden für jedes Kind in codierter Form im Protokollkopf dargestellt (s.u.). Der Vergleich mit den Punktzahlen in den diversen mathematischen Leistungstests zeigt dann auch, dass Kinder mit mittleren bis schlechten Leistungen in den Tests bei vielen Protokollen weniger qualitätvolle und weniger eindeutige Bearbeitungen abliefern.

Protokoll der Bearbeitung:

Proband 008: 7, m, ch, eu 22, es 18, su 33, n2 2.

Mikrowelt zstrich0; Aufgabe 5: Vorgabe 0..8; gesuchte Zahl 6.

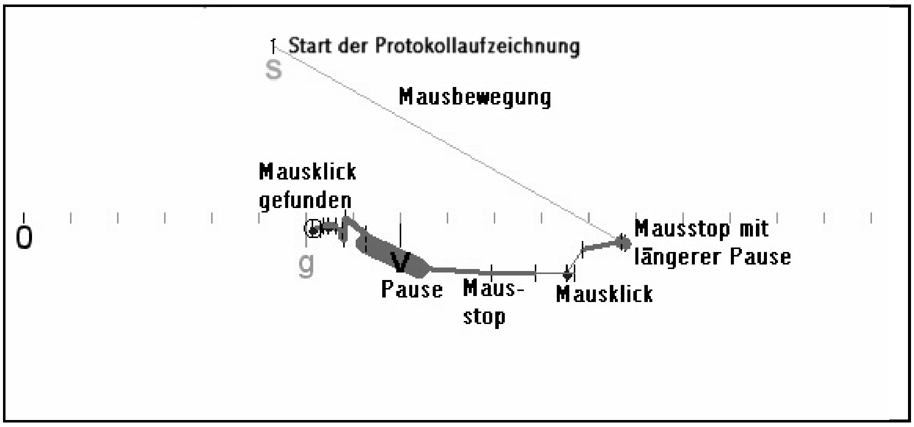


Abb. 4.19: Mikrowelt zstrich0 - Beispielbearbeitung Aufg. Z5-008

Ergänzende Beschreibung:

Die Bearbeitung beginnt links oben (S).

- Die Maus wird ohne Stop zum gedachten Zahlenstrahl bewegt (Mausbewegung).
- Es folgt eine Pause bei 13 (Mausstop), dargestellt durch die dickere Linie.
- Die Maus wird am gedachten Zahlenstrahl rückwärts, nach links bewegt, nach zwei Mausstopps erfolgt der erste Mausklick.

- Das Kind geht schrittweise (mit Mausstopps) weiter rückwärts bis zur Vorgabezahl (v=8).
- Dort wird eine längere Pause eingelegt.
- Nun erfolgt eine schrittweise Bewegung mit Korrektur rückwärts bis 7.
- Bei 7 wird der zweite Mausklick gesetzt, die Zahl ist nicht gefunden.
- Die Maus wir in kleinen Schritten weiter Richtung 6 bewegt.
- Dort wird der dritte Mausklick gesetzt, die gesuchte Zahl ist gefunden.

Die Strategie des Schülers ist vermutlich Rückwärtszählen ab der Vorgabezahl (8) in Einerschritten. Auffallend ist die Pause, nachdem die Maus am gedachten Zahlenstrahl positioniert ist. Es scheint so, als müsste sich das Kind noch einmal kurz orientieren. Die nächste längere Pause bei der Vorgabezahl dient wohl dazu, noch einmal die Strategie zu überlegen. Die beiden Denkpausen lassen auf kein sehr gut entwickeltes mentales Modell schliessen, das schnell aktiviert werden kann, sondern eher auf Unsicherheit und Unfertigkeit.

4.4.1 Zählstrategien ab Null

Im folgenden Unterkapitel werden sechs typische Bearbeitungen für diese Strategie dargestellt. Die Zählstrategie 'Zählen ab Null in Einerschritten' ist die Grundstrategie für Operationen am Zahlenstrahl. Diese Grundstrategie wurde für die Aktionen mit dem Igel bereits in der Einführungsstunde genutzt. Es zeigt sich aber, genau wie beim Test zur Einführungsstunde, auch bei den Computerprotokollen, dass nicht alle Kinder dazu fähig sind, die Schrittweite der Bewegung so zu wählen, dass sie zum Erfolg kommen. Diese Kinder legen die Schrittweite beliebig fest und nicht in Abhängigkeit von der Vorgabezahl und der Anzahl der Schritte bis dahin.

Die Bearbeitungen a) bis d) zeigen verschiedene Qualitäten des schrittweisen Zählens. Bearbeitung e) zeigt beispielhaft, wie die Kinder, falls andere Strategien nicht zum Erfolg führen, wieder auf die Grundstrategie zurückgreifen. Der Rückgriff auf die Grundstrategie 'Zählen ab Null in Einerschritten' ist aber kein sicherer Garant für Erfolg, wie man in Beispiel f) sieht. Das Kind versucht insgesamt viermal mit der Strategie zum Erfolg zu kommen, scheitert aber jedes Mal und gibt schließlich auf.

a) Daten z12-139

Proband 139: 7, w, ch, eu 31, es 21, su 27.

Mikrowelt zstrich0; Aufgabe 12: Vorgabe 0..10; gesuchte Zahl 5.

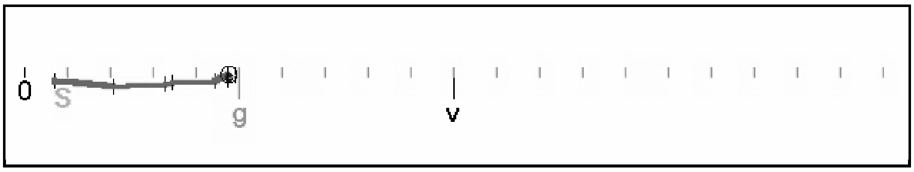


Abb. 4.20: Mikrowelt zstrich0 - Bearbeitung Aufg. z12-139

Die Schülerin beginnt ihre Bearbeitung bei 1. Die Maus wird schrittweise bis 5 bewegt. Dort erfolgt ein erster Mausklick, die gesuchte Zahl ist gefunden Die Schrittlänge ist nicht konstant, trotzdem wird als Strategie Zählen ab Null in Einerschritten erkannt. Die wechselnde Schrittlänge könnte aber auch dadurch erklärt werden, dass die Schülerin zwar bei 0 startet, gleichzeitig aber auch auf die Vorgabezahl 10 fixiert ist und dann mit der Maus die Mitte zwischen 0 und 10 ansteuert. Ob hier eine Direkt- oder eine Zählstrategie benutzt wurde lässt sich deshalb nicht eindeutig belegen.

b) Daten b12-160

Proband 160: 6, w, ch, eu 22, es 21, su 30.

Mikrowelt zstrich2; Aufgabe 12: Vorgabe 0..20; gesuchte Zahl 5.

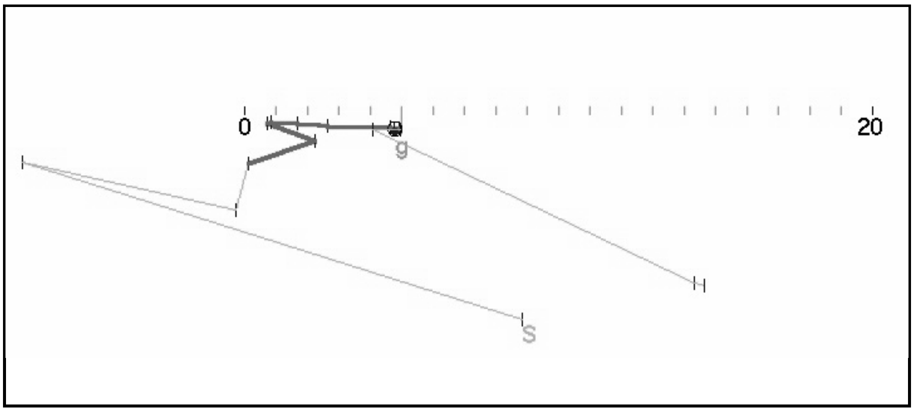


Abb. 4.21: Mikrowelt zstrich2 - Bearbeitung Aufg. b12-160

Die Schülerin hat zunächst Probleme, die Maus bei Null zu positionieren. Sie beginnt dann ab 1 eine schrittweise Mausbewegung bis 5 (g). Sie findet die Zahl mit dem ersten Mausklick. Die Schrittlänge ist relativ konstant, so dass als Strategie nur Zählen ab Null in Einerschritten in Frage kommt.

c) Daten z12-013

Proband 013: 6, m, ch, eu 19, es 17, su 26, n2 2.5.

Mikrowelt zstrich0; Aufgabe 12: Vorgabe 0..10; gesuchte Zahl 5.

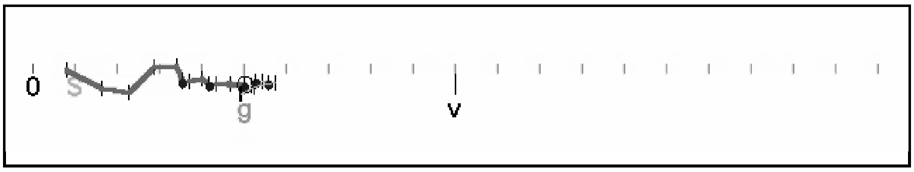


Abb. 4.22: Mikrowelt zstrich0 - Bearbeitung Aufg. z12-013

Die Bewegung zur gesuchten Zahl beginnt direkt bei 1. Es folgt eine schrittweise Mausbewegung in 5 Schritten. Die Schrittweite ist jedoch zu klein, weshalb der erste Mausklick bei 3,5 erfolgt. Die gesuchte Zahl wird nicht gefunden, deshalb bewegt der Schüler nun die Maus in kleinen Schritten weiter Richtung 5 und sucht mit weiteren Mausklicks. Nach zwei weiteren Mausklicks ist die Vorwärtssuche beendet, die Zahl ist gefunden. Die Grundstrategie scheint hier auch Vorwärtszählen ab Null in Einerschritten zu sein, ergänzt durch die Vorwärtssuche.

d) Daten b12-121

Proband 121: 6, w, ch, eu 29, es 24, su 33.

Mikrowelt zstrich2; Aufgabe 12: Vorgabe 0..20; gesuchte Zahl 5.

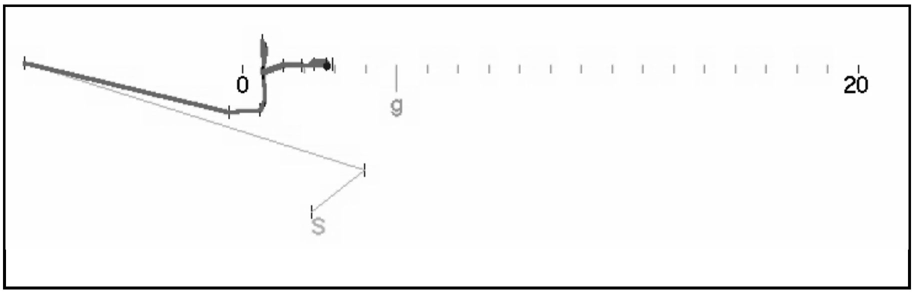


Abb. 4.23: Mikrowelt zstrich2 - Bearbeitung Aufg. b12-121

Diese Bearbeitung ist ähnlich wie die vorhergehende. Auch hier hat die Schülerin zunächst Probleme, die Maus zu positionieren, dann folgt ein schrittweises Vorwärtsgehen mit zu klein gewählter Schrittweite. Im Gegensatz zum Schüler z12-013 setzt die Probandin aber nur einen Mausklick. Sie findet die Zahl nicht und bricht die Bearbeitung ab. Die Strategie ist auch hier wieder Zählen ab Null in Einerschritten.

e) Daten z5-037

Proband 037: 6, w, ch, eu 24, es 13, su 31, n2 1.5.

Mikrowelt zstrich0; Aufgabe 5: Vorgabe 0..8; gesuchte Zahl 6.

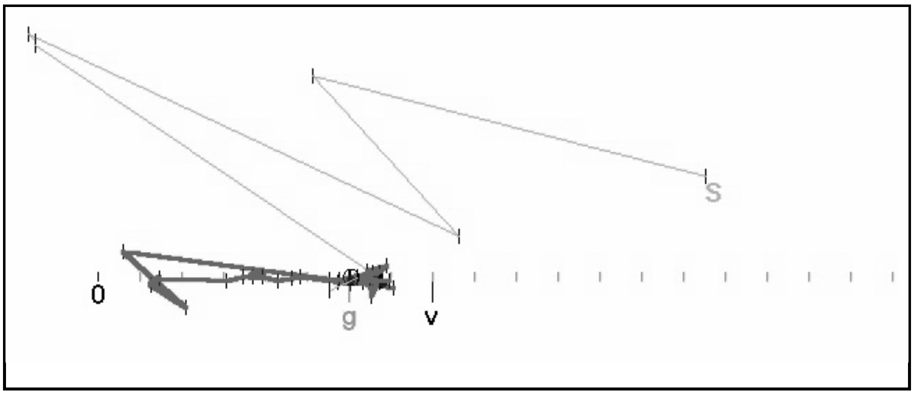


Abb. 4.24: Mikrowelt zstrich0 - Bearbeitung Aufg. z5-037

Auch hier hat die Schülerin zunächst Positionierungsprobleme. Sie bewegt die Maus aber dann bis 7 und versucht, die Zahl durch Klicken und Suchen (4 Mausklicks) direkt zu finden. Als dies nicht zum Erfolg führt, orientiert sie sich an Null und macht eine schrittweise Mausbewegung bis 6. Beim folgenden Mausklick ist die Zahl gefunden. Das Protokoll zeigt zunächst den Versuch die Zahl direkt zu finden. Anschließend wird mit der Standardstrategie 'Zählen ab Null in Einerschritten' weitergesucht.

f) Daten z12-035

Proband 035: 6, w, ch, eu 17, es 23, su 21, n2 3.

Mikrowelt zstrich0; Aufgabe 12: Vorgabe 0..10; gesuchte Zahl 5.

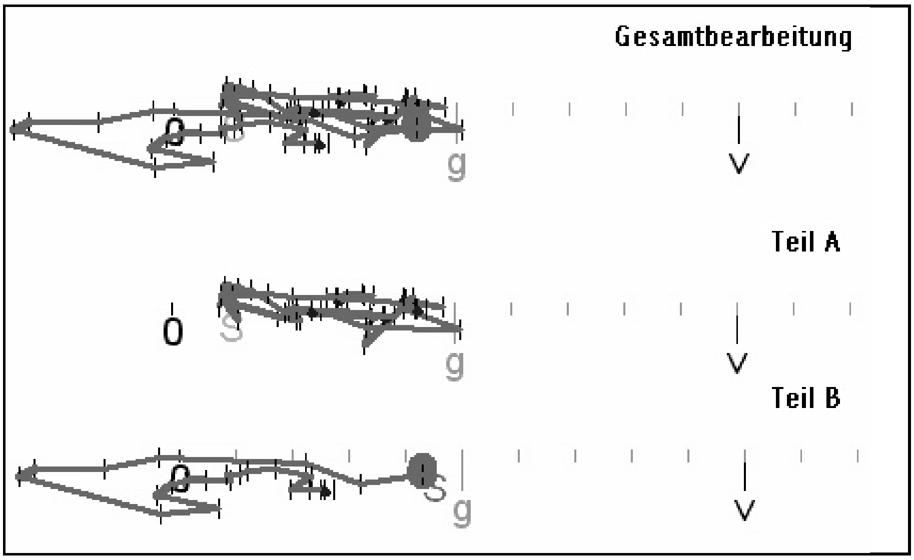


Abb. 4.25: Mikrowelt zstrich0 - Bearbeitung Aufg. z12-035

Die Visualisierung des gesamten Protokolls ist unübersichtlich, deshalb wurde sie zusätzlich in zwei Teilen dargestellt. In Teil A beginnt die Schülerin bei 1 und bewegt den Igel schrittweise bis 3. Dort erfolgt ein Mausklick, die Zahl wurde nicht gefunden. Anschließend wiederholt sich diese schrittweise Suche ab 1 noch zweimal ohne Erfolg, da die Schrittweite jedes mal zu klein gewählt ist. Während der Suche bewegt die Schülerin die Maus auch vorwärts zu 5, sie klickt dort aber nicht, sondern geht jedes mal wieder zurück und klickt in der Nähe von 3 bzw. 4. Es folgt eine längere Pause bei 4 (Teil B) und danach eine erneute Rückwärtsbewegung, um die Maus bei Null neu zu positionieren. Nach dem vierten Versuch, die Zahl durch Zählen ab Null in Einerschritten zu finden und erneutem Klick bei 3 bricht die Bearbeitung ab. Die Schülerin war nicht fähig, die falsche Strategie (zu kleine Schrittweite) zu erkennen und zu revidieren.

- *Kinder, die Zählstrategien ab Null nutzen, machen ihre Zählschritte meist zu klein, da sie sich nicht an der Gesamtlänge orientieren. Die Zählschritte haben keine relative sondern eine absolute Länge.*

4.4.2 Suche ab der Vorgabezahl

Bei den unten dargestellten Strategien mit Suche ab der Vorgabezahl kann man deutliche Unterschiede zwischen den Kindern feststellen. Fast alle nutzen zunächst ihr Wissen über die Anordung der Zahlen und konstruieren selbständig Anker, um sich daran bei der Suche zu orientieren. Gerade bei Aufgabe 12 (gesucht ist 5) wird dies deutlich. Hier werden nicht Zählstrategien ab Null sondern eine Orientierung an 10 genutzt, obwohl beide Strategien gleich naheliegend sind. Bei der danach folgenden Suche der Zahl gehen dann aber einige Kinder relativ direkt vor (c, e), während andere über schrittweise Strategien unterstützt durch Mausklicks versuchen, die Zahl zu finden (a, b, d). Es scheint hier so, als ob diese Kinder nur eine grobe Orientierung 0, 10, 20 haben, während die Kinder c) und e) auch die Zwischenzahlen sehr genau am mentalen Zahlenstrahl lokalisieren können.

a) Daten z5-041

Proband 041: 6, m, ch, eu 22, es 8, su 34, n2 1.

Mikrowelt zstrich0; Aufgabe 5: Vorgabe 0..8; gesuchte Zahl 6.

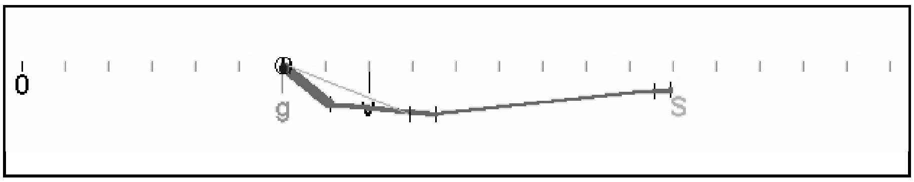


Abb. 4.26: Mikrowelt zstrich0 - Bearbeitung Aufg. z5-041

Der Schüler bewegt die Maus am Zahlenstrahl rückwärts bis 8. Der nächste Schritt geht bis 7. Nach einer etwas längeren Pause wird die Maus genau zur gesuchten Zahl bewegt. Als Strategie wird hier 'Rückwärtszählen ab der Vorgabezahl' angenommen. Auch die Pause vor dem Abschluss der Suche ist typisch, sie dient der erneuten Orientierung vor dem Setzen des entscheidenden Klicks an der richtigen Stelle (vgl. auch 4.5.6)

b) Daten a12-113

Proband 113: 6, m, ch, eu 19, es 15, su 18.

Mikrowelt zstrich1; Aufgabe 12: Vorgabe 0..10..20; gesuchte Zahl 5.

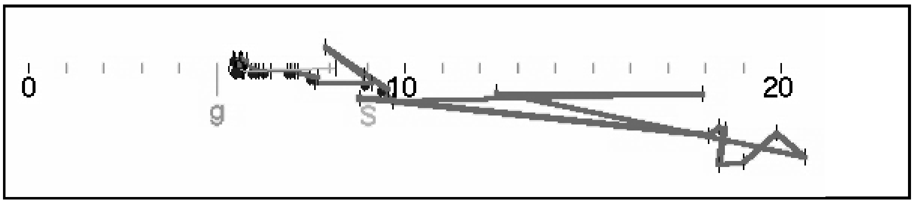


Abb. 4.27: Mikrowelt zstrich1 - Bearbeitung Aufg. a12-113

Die Suche nach der Zahl beginnt bei 10. Dann wird die Maus aber zunächst bis 20 bewegt, danach wieder zurück zu 10. Hier setzt nun die Suche durch Rückwärtsgehen mit Klicken ein. Nach acht Mausklicks und schrittweiser Orientierung Richtung 5 ist die Zahl gefunden. Das Protokoll vermittelt deshalb den Eindruck, als ob hier keine genauen Vorstellungen zur Anordung der Zahlen vorhanden sind und die Zahl eher zufällig gefunden wurde.

c) Daten a12-025

Proband 025: 6, m, ch, eu 21, es 9, su 33, n2 1.75.

Mikrowelt zstrich1; Aufgabe 12: Vorgabe 0..10..20; gesuchte Zahl 5.

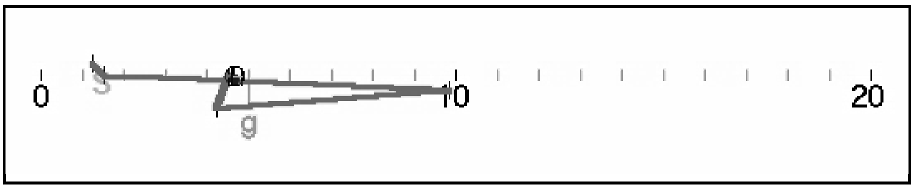


Abb. 4.28: Mikrowelt zstrich1 - Bearbeitung Aufg. a12-025

Das Protokoll zeigt eine klare Strategie. Der Schüler beginnt seine Bearbeitung bei 1, bewegt die Maus anschließend ohne Pausen zu 10 und von dort zurück bis 5. Nach einer kurzen Pause und Korrektur erfolgt der Mausklick bei der gesuchten Zahl. Es scheint so, als ob der Schüler die Strecke zwischen 0 und 10 mit der Maus misst, um sie anschließend zu teilen und dadurch die Zahl 5 zu konstruieren.

d) Daten b12-117

Proband 117: 6, w, ch, eu 28, es 22, su 29.

Mikrowelt zstrich2; Aufgabe 12: Vorgabe 0..20; gesuchte Zahl 5.

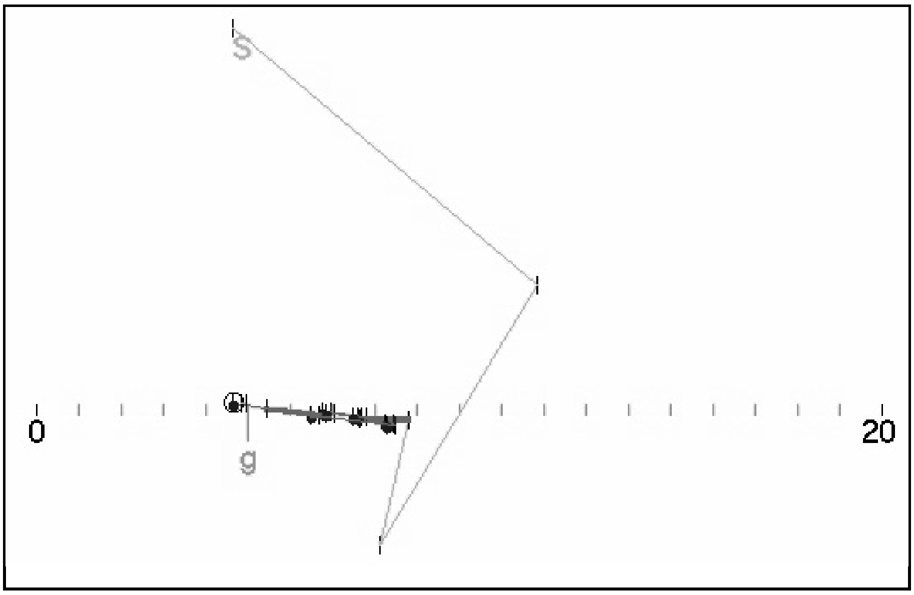


Abb. 4.29: Mikrowelt zstrich2 - Bearbeitung Aufg. b12-117

Die Schülerin orientiert sich an der Mitte zwischen 0 und 20. Sie beginnt ihre Suche bei 9. Von dort aus geht sie schrittweise rückwärts und sucht, unterstützt durch Mausklicks, die Zahl. Nach acht Mausklicks ist die Zahl gefunden. Man kann hier kaum eine Aussage dahingehend machen, dass die Schülerin operative Zusammenhänge genutzt hat, da sie ja sofort bei 9 anfängt die Zahl durch Klicks zu suchen und dann eher zufällig, nach einer Reihe weiterer Mausklicks, auf die gesuchte Zahl trifft. Die Zahlenstrahlvorstellung ist eher vage, die Zahl 5 wird irgendwo in der ersten Hälfte des Zahlenstrahls plaziert.

e) Daten b12-129

Proband 129: 6, m, ch, ce, eu 19, es 19, su 27.

Mikrowelt zstrich0; Aufgabe 5: Vorgabe 0..8; gesuchte Zahl 6.

In der folgenden Visualisierung sieht man, wie die Maus in die Nähe des Zahlenstrahls geführt wird. Die Bearbeitung beginnt bei 2. Dann plaziert der Schüler die Maus bei 10 und bewegt sie rückwärts in 2 Schritten zur Zahl 6. Hier hat der Schüler Positionierungsprobleme, die Maus wird neu ausgerichtet und dann erfolgt der Mausklick bei 5.

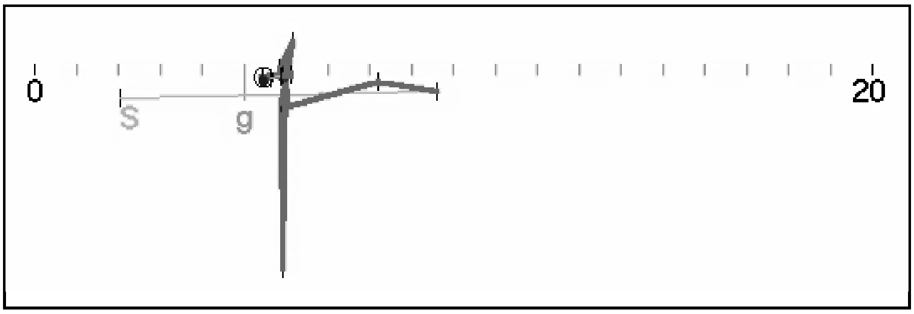


Abb. 4.30: Mikrowelt zstrich2 - Bearbeitung Aufg. b12-129

Die hier dargestellte Strategie könnte man fast schon als Direktstrategie interpretieren. Der Schüler nutzt einen mentalen Anker bei 10 und geht dann in wenigen Schritten zurück zur gesuchten Zahl.

- *Die Beispiele für Strategie 2 zeigen, dass die Orientierung an der Zehner- bzw. Zehner-Fünferstruktur erfolgreiche Konstruktionen unterstützt.*
- *Bei fehlender sichtbarer Struktur (zstrich2) wird die Zehner-Fünferstruktur von den Kindern mental konstruiert. Diese mentalen Anker können dann für die Konstruktion der gesuchten Zahl genutzt werden.*

4.4.3 Direktstrategien

Alle Direktstrategien zeichnen sich dadurch aus, dass die Schüler die gesuchte Zahl direkt ansteuern und dann mit einem einzigen Mausklick an der richtigen Stelle markieren. Es scheint so, als ob das mentale Bild des Zahlenstrahls dieser Kinder so stark ist, dass sie es direkt auf den Monitor projizieren können. Es fehlen bei dieser Strategie auch die leichten Abweichungen von der gesuchten Zahl, die bei den anderen Strategien zu beobachten sind (vgl. Abb.4.30). Der Mausklick erfolgt exakt auf der Stelle am Zahlenstrahl, an der die gesuchte Zahl sein muss.

a) Daten z5-030

Proband 030: 6, m, ch, eu 18, es 11, su 32, n2 1.25.

Mikrowelt zstrich0; Aufgabe 5: Vorgabe 0..8; gesuchte Zahl 6.

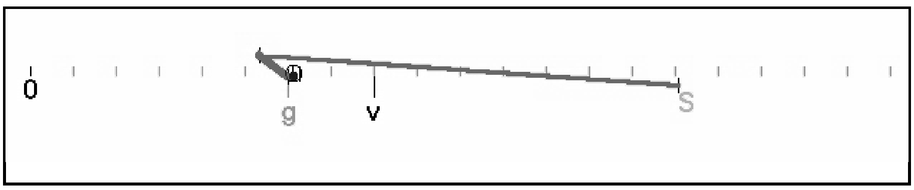


Abb. 4.31: Mikrowelt zstrich0 - Bearbeitung Aufg. z5-030

Die Maus wird am Zahlenstrahl bei 15 positioniert. Dann erfolgt eine direkte Mausbewegung am Zahlenstrahl entlang bis 7 mit einer kleinen Korrektur und der Klick auf die gesuchte Zahl bei 8.

b) Daten z12-020

Proband 020: 6, m, ch, eu 26, es 20, su 34, n2 1.25.

Mikrowelt zstrich0; Aufgabe 12: Vorgabe 0..10; gesuchte Zahl 5.

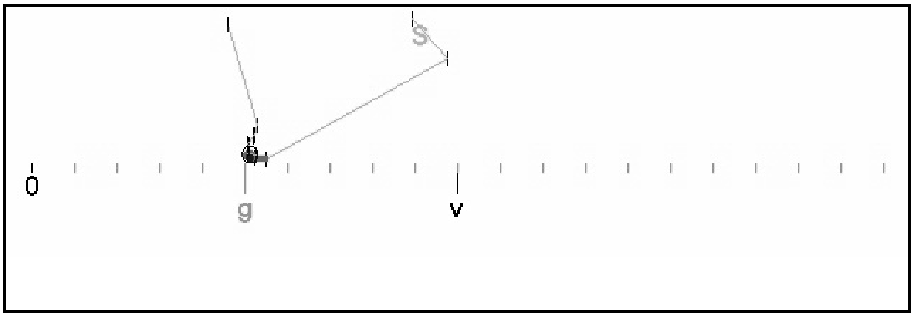


Abb. 4.32: Mikrowelt zstrich0 - Bearbeitung Aufg. z12-020

Der Schüler bewegt die Maus direkt zu 5 am Zahlenstrahl, nach einer minimalen Korrektur erfolgt der Klick auf 5. Eine Orientierung an 0 und 10 ist im Protokoll nicht sichtbar.

c) Daten a12-023

Proband 023: 6, m, ch, eu 22, es 19, su 28, n2 1.75.

Mikrowelt zstrich1; Aufgabe 12: Vorgabe 0..10..20; gesuchte Zahl 5.

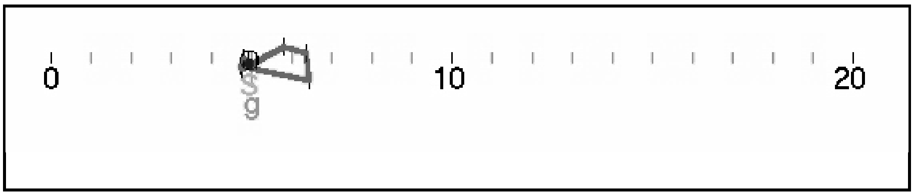


Abb. 4.33: Mikrowelt zstrich1 - Bearbeitung Aufg. a12-023

Die Bearbeitung beginnt direkt bei 5. Es folgt eine kleine Schleife, dann der Klick an der richtigen Stelle bei 5.

d) Daten b12-022

Proband 022: 6, m, ch, eu 29, es 20, su 35, n2 1.25.

Mikrowelt zstrich2; Aufgabe 12: Vorgabe 0..20; gesuchte Zahl 5.

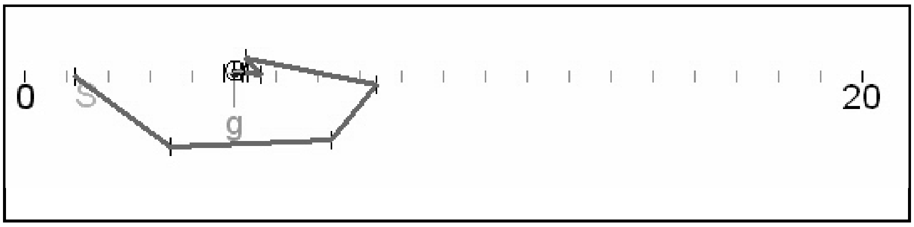


Abb. 4.34: Mikrowelt zstrich2 - Bearbeitung Aufg. b12-022

Der Schüler beginnt seine Bearbeitung bei 1. Danach kommt aber keine Suche durch Vorwärtszählen, sondern die Maus wird im Bogen direkt zu 5 bewegt, wo dann der Mausklick erfolgt.

e) Daten z12-027

Proband 027: 6, m, ch, eu 24, es 2, su 28, n2 2.25.

Mikrowelt zstrich0; Aufgabe 12: Vorgabe 0..10; gesuchte Zahl 5.

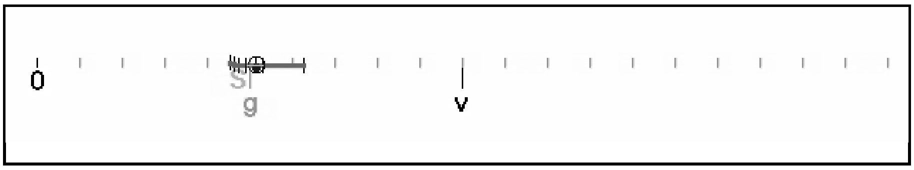


Abb. 4.35: Mikrowelt zstrich0 - Bearbeitung Aufg. z12-027

Die Maus wird direkt zum Zahlenstrahl bei 5 bewegt. Es folgt ein Schritt bis 6, dann ein Korrekturschritt zurück zu 5 und der Mausklick auf die gesuchte Zahl.

- *Bei Direktstrategien werden alle möglichen Relationen des vorgegeben Kontextes beachtet und mit dem mentalen Zahlenstrahl koordiniert. Als Folge entstehen relativ genaue Konstruktionen mit geringen Abweichungen von der gesuchten Zahl.*

4.4.4 Zahlsuche durch Klicken

Die Schüler, die versuchen die Zahl durch Klicken zu finden, haben vermutlich eine eher schlechte mentale Zahlvorstellung. Dies kann man aber nicht mit Gewissheit feststellen, da durch die vielen Klicks andere möglicherweise ablaufenden Strategien überdeckt werden. Diese Schüler sind außerdem ein Beispiel dafür, dass Computererfahrung sich nicht unbedingt positiv auf die zielgerichtete Arbeit in den Mikrowelten auswirken muss. Die Kinder suchen häufig ab dem vermuteten Ort der gesuchten Zahl in beide Richtungen. Diese Art alternierender Suche kann man bei Kindern, die mit Klicken suchen häufig beobachten. Dabei hat man den Eindruck, dass das häufige Klicken, das sehr schnell durchgeführt wird, verhindert, dass die Kinder über eine andere Strategie nachdenken, da sie ja durch Klicken früher oder später irgendwie zum Erfolg kommen. Außerdem sind dies meist Kinder, die gut mit der Maus umgehen können, also Erfahrung im Umgang mit dem Computer haben.

a) Daten z12-025

Proband 025: 6, m, ch, eu 21, es 5, su 33, n2 1.75.

Mikrowelt zstrich0; Aufgabe 12: Vorgabe 0..10; gesuchte Zahl 5.

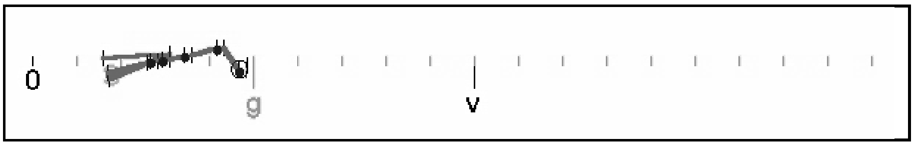


Abb. 4.36: Mikrowelt zstrich0 - Bearbeitung Aufg. z12-025

Die Suche beginnt zwischen 1 und 2. Es folgt eine Mausbewegung bis 3, die dann wieder korrigiert wird, indem die Maus zurück auf 2 gesetzt wird. Dann folgt eine schrittweise Bewegung Richtung 5. Hier wird nach jedem Schritt geklickt. Nach fünf Schritten mit Klick ist die Zahl gefunden. Das obige Beispiel zeigt die Suche durch Klicken in der Mikrowelt zstrich0.

Es folgt ein Prokoll desselben Kindes in der Mikrowelt zstrich2.

Protokoll der Bearbeitung:

Mikrowelt zstrich2; Aufgabe 12: Vorgabe 0..20; gesuchte Zahl 5.

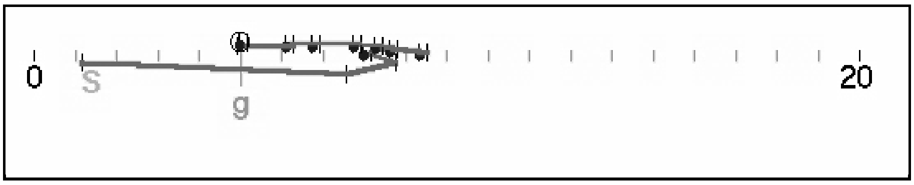


Abb. 4.37: Mikrowelt zstrich2 - Bearbeitung Aufg. b12-025

Auch bei dieser Bearbeitung sucht der Proband wieder durch Klicken nach der Zahl. Er beginnt bei 1, orientiert sich dann Richtung 10 und fängt bei 8 mit der Suche durch Klicken an. Zunächst sucht er aber weiter Richtung 20, korrigiert sich bei 10 und sucht nun rückwärts bis 5.

Bei beiden Bearbeitungen ist es schwierig, Aussagen über das Zahlenstrahlwissen und die mentale Zahlvorstellung des Kindes zu machen, da man nicht weiss, ob das Klicken nur das schrittweise Vorwärtsgehen begleitet oder ob der Schüler die Zahl an jedem Ort, an dem er geklickt hat vermutet.

b) Daten b12-016

Proband 016: 7, m, ch, ce, eu 26, es 22, su 31, n2 1.

Mikrowelt zstrich2; Aufgabe 12: Vorgabe 0..20; gesuchte Zahl 5.

Der Schüler, von dem das folgende Protokoll stammt, hat sicher ein schlechtes mentales Modell des Zahlenstrahls. Er sucht in verschiedenen Bereichen des Zahlenstrahls eher zufällig.

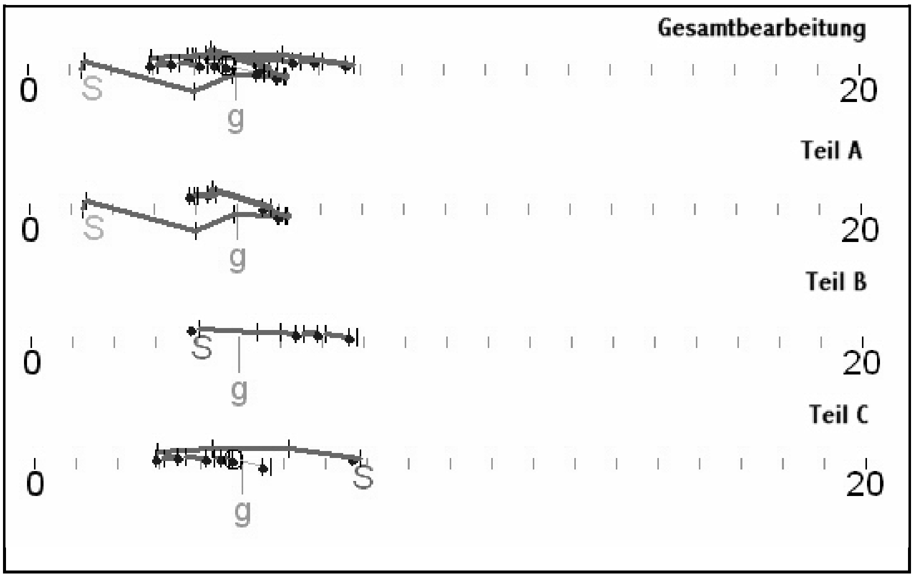


Abb. 4.38: Mikrowelt zstrich2 - Bearbeitung Aufg. b12-016

Die Suche beginnt bei 1 (Teil A). Dann wird die Maus Richtung 5 bewegt und es werden bei 6 zwei Mausklicks gesetzt. Da er die Zahl nicht findet, geht der Schüler zurück zu 4 und setzt auch hier zwei Mausklicks. Statt aber nun die gesuchte Zahl zwischen 4 und 6 zu lokalisieren, bewegt er die Maus zurück zu 6 (Teil B) und sucht nun mit weiteren Mausklicks Richtung 10. Bei 8 bricht er die Suche ab (Teil C) und bewegt die Maus wieder zurück bis 3. Dort beginnt er erneut mit Mausklicks Richtung 5 zu suchen, bis er dann bei 5 einen Treffer landet.

c) Daten b12-061

Proband 061: 6, m, ch, ce, eu 18, es 8, su 26.

Mikrowelt zstrich2; Aufgabe 12: Vorgabe 0..20; gesuchte Zahl 5.

Auch die folgende Bearbeitung eines Schülers, der in den Leistungen der mathematischen Tests eher mittelmäßig bis schwach abschneidet, führt zur Lösung. Er findet nach längerer Bearbeitungszeit und sehr vielen Klicks die gesuchte Zahl. Wohl eher zufällig, als strategisch und planvoll, löst der Schüler die Aufgabe.

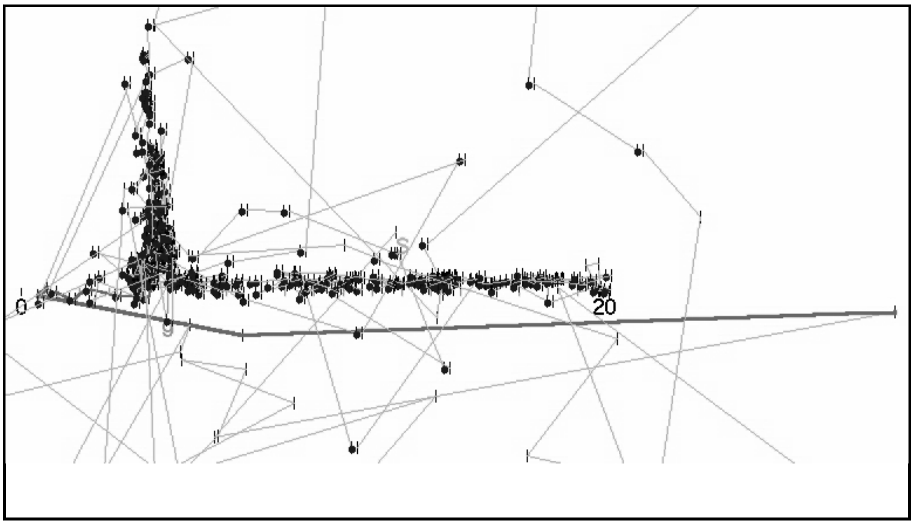


Abb. 4.39: Mikrowelt zstrich2 - Bearbeitung Aufg. b12-061

Seine Strategie: er belegt ab 20 rückwärts den ganzen Zahlenstrahl mit Mausklicks. Bei der gesuchten Zahl sieht man eine Spitze aus Mausklicks. Hier hat sich der Schüler, das Igelbild (Igel freut sich) bei der gesuchten Zahl immer wieder anzeigen lassen. Ähnliche Klickwiederholungen kann man bei mehreren Schülern beobachten, die die Mikrowelt in ein Computerspiel umfunktionieren und dann mit dem Igelbild spielen.

- *Zahlensuche durch Klicken ist eine Oberflächenstrategie, die nicht zu vertieften Einsichten über die Zusammenhänge zwischen den Zahlen in der bearbeiteten Mikrowelt führt.*

4.4.5 Strategiewechsel während der Suche

Strategiewechsel bei der Zahlensuche sind relativ selten zu beobachten. Die Kinder halten meist an der zuerst gewählten Strategie fest und wenden diese dann bei Misserfolg einfach wiederholt an. Relativ häufig dagegen ist der in Beispiel a) beschriebene Wechsel zwischen schrittweisem Vorgehen und Suche durch Klicken. Wenn die Kinder sicher sind, an der richtigen Stelle des Zahlenstrahls zu sein, dann folgen meist sehr viele, auch wiederholte Klicks in einem kleinen Umfeld.

a) Daten a5-001

Proband 001: 6, w, ch, eu 22, es 16, su 35, n2 1.25.

Mikrowelt zstrich1; Aufgabe 5: Vorgabe 0..10..20; gesuchte Zahl 6.

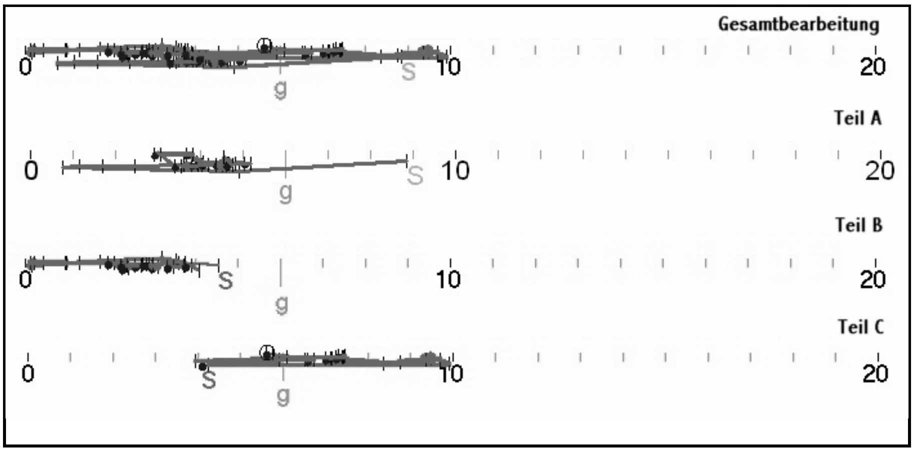


Abb. 4.40: Mikrowelt zstrich1 - Bearbeitung Aufg. a5-001

Die Suche beginnt hier bei 9 (Teil A). Die Schülerin bewegt die Maus zurück zu 1 und beginnt mit der Strategie 'Vorwärtszählen in Einerschritten'. Sie geht 6 Schritte vorwärts Richtung 10. Da die Schritte aber zu kurz gewählt waren, erfolgt der erste Klick bei 3. Nun wechselt sie ihre Strategie und beginnt eine 'Suche mit Mausklicks' im Bereich zwischen 3 und 5. Auch hier hat Sie keinen Erfolg und sie bewegt die Maus zurück zu 0 (Teil B). Es folgt wieder ein Vorwärtszählen mit Einerschritten und anschließend eine Suche mit Mausklicks im Bereich zwischen 2 und 4, wieder ohne Erfolg. Der nächste Versuch beginnt nun bei 10 (Teil C). Die 'schrittweise Suche ab der Vorgabezahl' führt zu einem Mausklick bei 7, da die Schritte wieder zu klein gewählt waren. Anschließend wird mit Mausklicks weitergesucht Richtung 0. Dies führt dann auch nach vier weiteren Mausklicks zum Erfolg.

b) Daten b5-164

Proband 164: 6, w, eu 9, es 21, su 7.

Mikrowelt zstrich2; Aufgabe 5: Vorgabe 0..20; gesuchte Zahl 6.

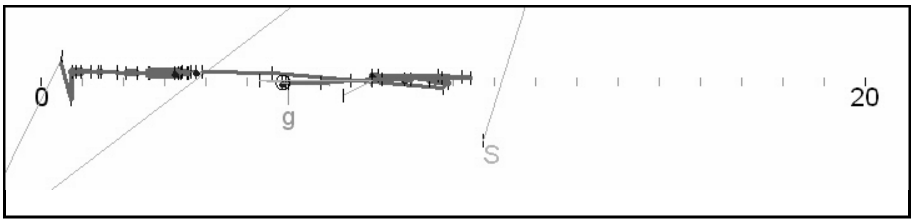


Abb. 4.41: Mikrowelt zstrich0 - Bearbeitung Aufg. b5-164

Die Schülerin positioniert die Maus bei Null und beginnt mit einer Zählstrategie ab Null. Wegen zu kleiner Schrittweite wird der erste Mausklick bei 3 gesetzt. Nach einem weiteren Mausklick bei 4 bricht sie die Strategie ab und bewegt den Mauszeiger in die Mitte zu 10, von wo aus sie nun, mit einer

Korrektur, in Schritten rückwärts sucht und die gesuchte Zahl 6 findet. Diese Vorgehensweise, in Mikrowelt zstrich3 mit einer Zählstrategie zu suchen, ist typisch für leistungsmäßig schwächere Schüler, die auch am Ende des ersten Schuljahres noch die Minimalstrategie nutzen.

- *Leistungsschwächere Kinder, die kein gutes mentales Modell des Zahlenstrahls haben, machen eher Strategiewechsel während der Bearbeitung. Die gewählten Strategien sind meist nicht optimal.*

4.4.6 Pausen während der Suche

Pausen während der Bearbeitung treten vor allem dann auf, wenn die Kinder bei ihrer Suche sicher sind, an der richtigen Stelle geklickt zu haben und die gesuchte Zahl nicht finden. Dann werden die Strategien meist noch einmal überdacht, was zu einer Unterbrechung der Suche führt. Dieses Überdenken der Strategien bzw. Nachdenken über die richtige Strategie kann auch zu Pausen führen, wenn der Mauszeiger auf den Zahlenstrahl gesetzt wird oder bevor sich ein Proband entscheidet zu Klicken.

a) Daten b12-174

Proband 174: 6, w, ch, eu 28, es 17, su 30.

Mikrowelt zstrich2; Aufgabe 12: Vorgabe 0..20; gesuchte Zahl 5.

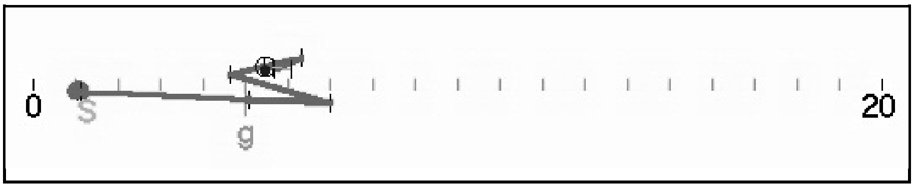


Abb. 4.42: Mikrowelt zstrich2 - Bearbeitung Aufg. b12-174

Der Mauszeiger wird am Zahlenstrahl positioniert, dann folgt eine Pause, in der die weitere Strategie festgelegt wird oder in der sich die Schülerin neu orientiert. Im Anschluss daran wird der Mauszeiger direkt mit einer Korrektur zu 5 bewegt und auf die gesuchte Zahl geklickt.

b) Daten a12-082

Proband 082: 7, m, ch, eu 21, es 18, su 31.

Mikrowelt zstrich1; Aufgabe 12: Vorgabe 0..10..20; gesuchte Zahl 5.

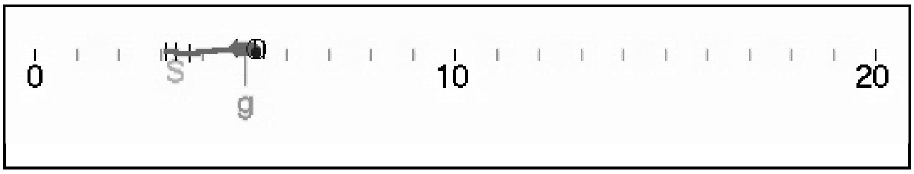


Abb. 4.43: Mikrowelt zstrich1 - Bearbeitung Aufg. a12-082

Hier bewegt der Schüler die Maus direkt am Zahlenstrahl entlang zu 5. Dort macht er eine längere Pause, dann erfolgt der Klick auf die gesuchte Zahl. Die Pause vor dem Klick scheint nötig zu sein, um noch einmal zu kontrollieren, ob alles stimmt, bevor man sich durch den Klick für die Position der gesuchten Zahl entscheidet.

c) Daten z12-035

Proband 035: 6, w, ch, eu 17, es 23, su 21, n2 3.

Mikrowelt zstrich0; Aufgabe 12: Vorgabe 0..10; gesuchte Zahl 5.

Die Protokolle der folgenden Bearbeitungen sind im Endzustand sehr unübersichtlich und wurden deshalb wieder in mehrere Teilbilder aufgesplittet. Wenn an dieser Stelle eine dynamische Darstellung möglich wäre, müsste man diese Teilbilddarstellungen nicht machen.

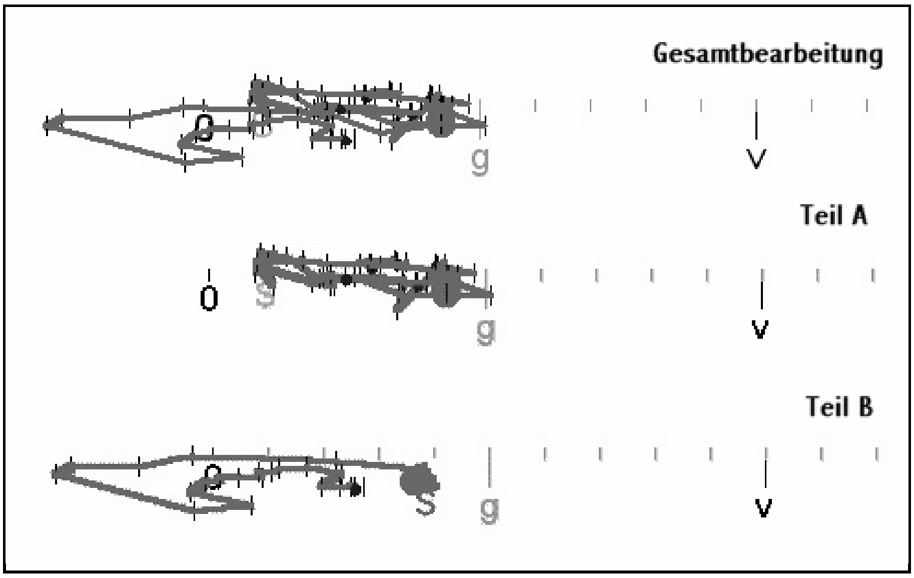


Abb. 4.44: Mikrowelt zstrich0 - Bearbeitung Aufg. z12-035

Die Bearbeitung beginnt mit einer Suche zwischen 1 und 4. Insgesamt bewegt die Schülerin den Mauszeiger dreimal schrittweise, begleitet von Klicks, in diesem Bereich hin und her (Teil A). Es folgt eine längere Pause (Teil B), dann wird die Maus zurück zu 0 bewegt und es wird erneut schrittweise gesucht. Ein Klick bei 3 beendet die Suche, die Schülerin bricht ab.

d) Daten z5-008

Proband 008: 7, m, ch, eu 22, es 18, su 33, n2 1.75.

Mikrowelt zstrich0; Aufgabe 5: Vorgabe 0..8; gesuchte Zahl 6.

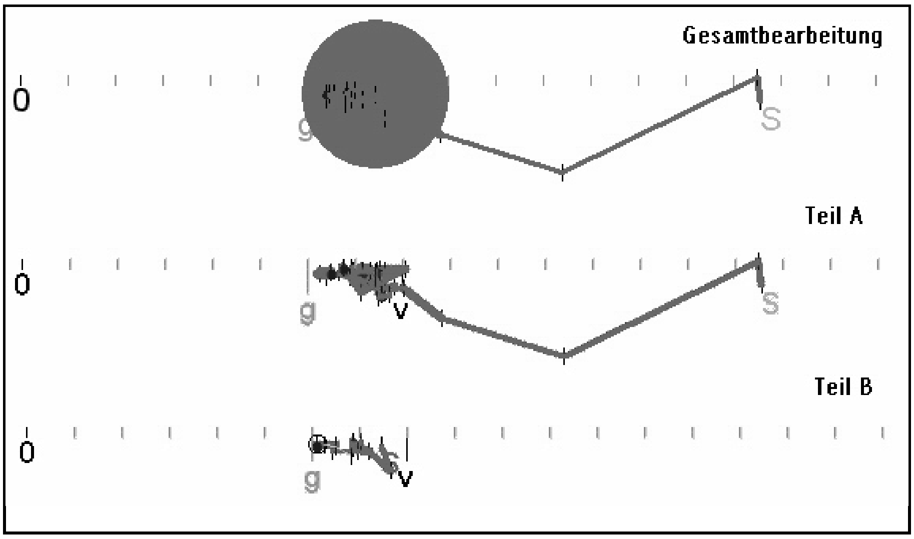


Abb. 4.45: Mikrowelt zstrich0 - Bearbeitung Aufg. z5-017

Der Schüler beginnt seine Suche bei 15 (Teil A). Von dort geht er rückwärts bis zur Vorgabezahl 8. Es beginnt nun die schrittweise Suche rückwärts Richtung 6. Dabei werden mehrere Mausklicks gesetzt, auch in der Nähe der gesuchten Zahl, alles jedoch ohne Erfolg. Nun macht der Schüler eine sehr lange Pause und beginnt erneut ab der Vorgabezahl zu suchen (Teil B). Diesmal findet er die gesuchte Zahl bei 6.

- *Pausen während der Suche dienen der Orientierung am Zahlenstrahl, bzw. der Aktivierung des mentalen Modells.*

4.4.7 Suche ohne Strategie

Die Kinder bei denen keine Strategien zu beobachten sind, erreichen in den mathematischen Leistungstests (Eingangstest, Abschlusstest) meist nur geringe bis mittlere Punktzahlen. Außerdem sind dies häufig Kinder, die keine Computererfahrung und deshalb auch motorische Probleme beim Bedienen der Maus haben.

a) Daten z12-015

Proband 015: 6, m, eu 11, su 24, n2 2.25.

Mikrowelt zstrich0; Aufgabe 12: Vorgabe 0..10; gesuchte Zahl 5.

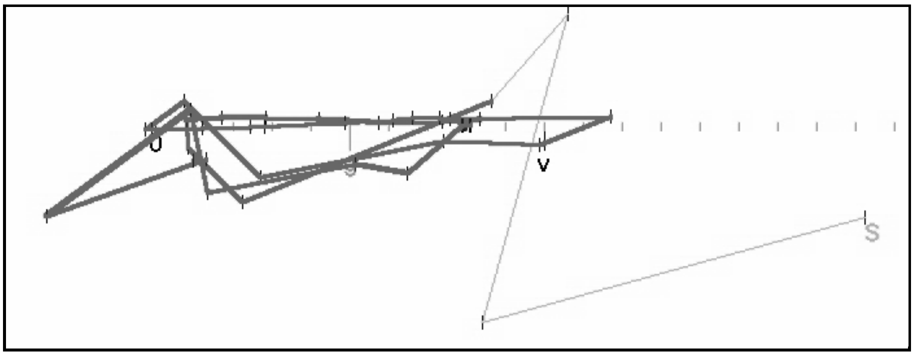


Abb. 4.46: Mikrowelt zstrich0 - Bearbeitung Aufg. z12-015

Die Bearbeitung beginnt in der Nähe von 20. Der Schüler hat Positionierungsprobleme, bewegt den Mauszeiger aber mehrmals zwischen 0 und 10, bzw. 8 hin und her. Er setzt einen Mausklick bei 8 und bricht die Bearbeitung ab.

Daten b12-113

Proband 113: 6, m, ch, eu 19, es 15, su 18.

Mikrowelt zstrich2; Aufgabe 12: Vorgabe 0..20; gesuchte Zahl 5.

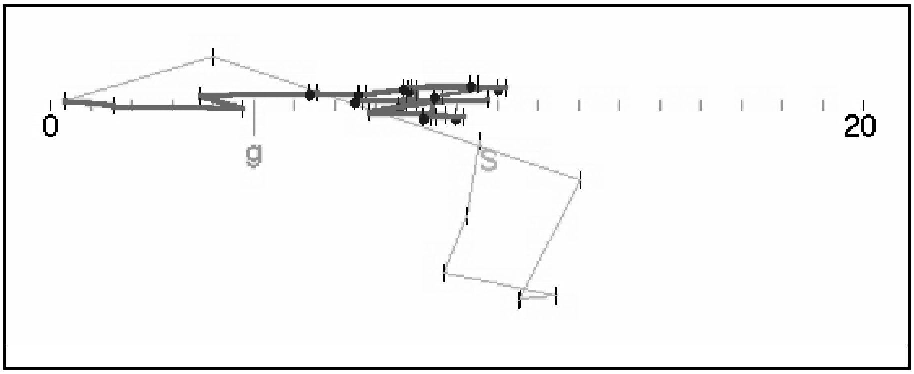


Abb. 4.47: Mikrowelt zstrich2 - Bearbeitung Aufg. b12-113

Der Mauszeiger wird zunächst bei Null positioniert. Dann geht der Schüler in Schritten vorwärts bis 6. Dort erfolgt der erste Mausklick. Anschließend wird weiter Richtung 10 durch Hin- und Herspringen und Klicken versucht, die Zahl zu finden. Nach elf Mausklicks bricht der Schüler die Bearbeitung ab.

- *Suchen ohne Strategie deutet auf ein fehlendes oder fehlerhaftes mentales Modell hin.*

4.4.8 Lernen während der Bearbeitung

Lerneffekte innerhalb einer Bearbeitungssitzung treten nicht nur beim Wissen über die Zahlen am Zahlenstrahl im jeweiligen Kontext auf. Es lassen sich auch motorische Verbesserungen, also der Fähigkeiten im Umgang mit der

Maus beobachten (c). Innerhalb einer Bearbeitungssequenz kann man die Aufgaben 5 und 28 gut vergleichen, da die Aufgaben identisch sind (c und d). Weitere Beispiele zu 'Lernen während der Bearbeitung' finden sich auch unten in den Fallanalysen einzelner Kinder bei ihrer Arbeit in den verschiedenen Mikrowelten (siehe 4.4.9).

a) Daten a5-060

Proband 060: 6, m, ch, eu 27, es 14, su 33.

Mikrowelt zstrich1; Aufgabe 5: Vorgabe 0..10..20; gesuchte Zahl 6.

In der folgenden Darstellung sieht man bei derselben Aufgabe eine deutliche Verbesserung der Vorgehensweise beim Vergleich der ersten Bearbeitung und der Wiederholung.

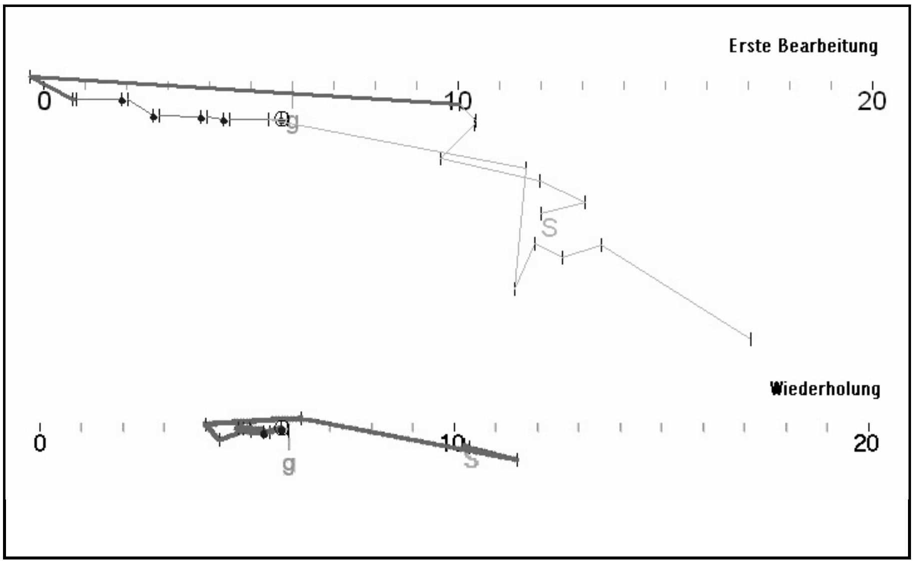


Abb. 4.48: Mikrowelt zstrich1 - Bearbeitung Aufg. a5-060

Bei der ersten Bearbeitung wird eine Zählstrategie mit mehreren Mausklicks angewandt, während bei der Wiederholung die Suche fast direkt zur gesuchten Zahl führt. Zwischen beiden Bearbeitungen lag eine längere Zeitspanne von 3 Wochen (06.06. und 25.06.), so dass man hier noch nicht direkt von Lernen während der Bearbeitung sprechen kann.

b) Daten a28-114

Proband 114: 6, m, ch, ce, eu 26, es 10, su 22.

Mikrowelt zstrich1; Aufgabe 28: Vorgabe 0..10..20; gesuchte Zahl 6.

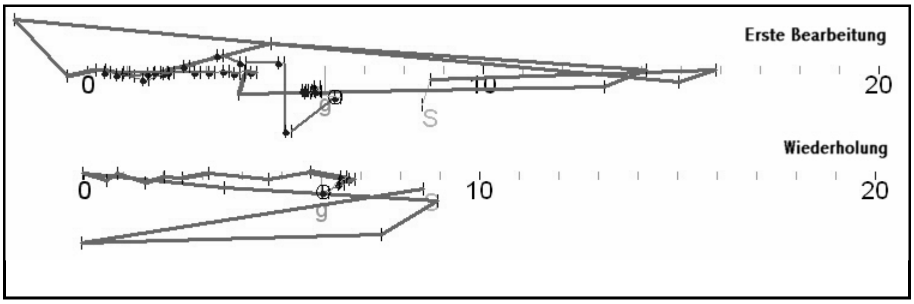


Abb. 4.49: Mikrowelt zstrich1 - Bearbeitung Aufg. a28-114

Diese beiden Bearbeitungen hat ein Schüler am selben Tag, direkt hintereinander gemacht (8:59 Uhr und 9:05 Uhr). Auch hier sieht man eine deutliche Verbesserung von der ersten Bearbeitung zur Wiederholung. Während bei der ersten Bearbeitung sehr viele Mausbewegungen und Klicks über einen weiten Bereich, also eigentlich keine gezielte Strategie, zu sehen ist, sieht die zweite Bearbeitung zielgerichtet aus. Der Schüler positioniert die Maus bei Null und geht in Schritten bis zur gesuchten Zahl vorwärts. Er findet die Zahl beim zweiten Mausklick.

c) Daten z5-28-072

Proband 072: 7, w, ch, eu 26, es 10, su 22.

Mikrowelt zstrich0; Aufgaben 5/28: Vorgabe 0..8; gesuchte Zahl 6.

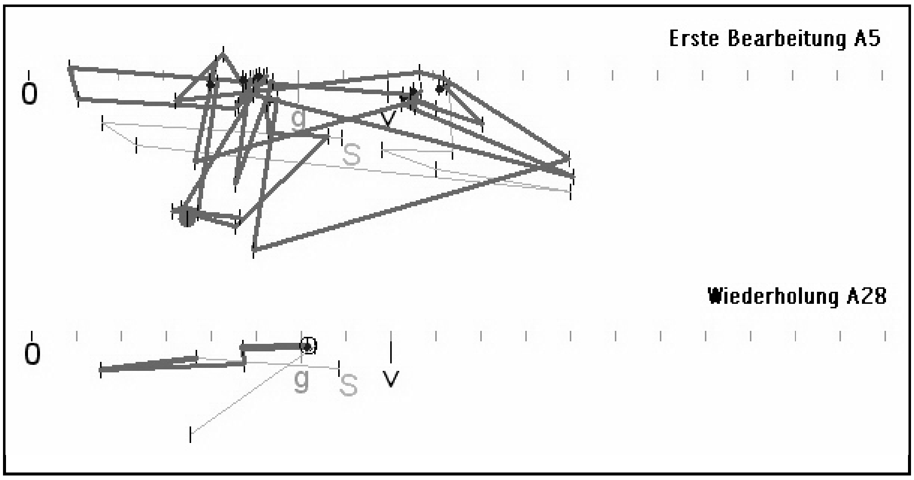


Abb. 4.50: Mikrowelt zstrich0 - Bearbeitung Aufg. z5-28-072

Die folgenden Aufgaben (A5 und A28) kommen nacheinander jeweils in einer Bearbeitungssitzung vor. Bei beiden Aufgaben ist die Vorgabezahl 8, die gesuchte Zahl ist 6. Während die Schülerin bei Aufgabe 5 noch große Positionierungsprobleme hat und eine Strategie nicht zu erkennen ist, geht sie bei Aufgabe 28 sehr direkt zur gesuchten Zahl und findet diese mit dem ersten Klick.

d) Daten z5-28-079

Proband 079: 7, m, ch, eu 23, es 21, su 35.

Mikrowelt zstrich0; Aufgaben 5/28: Vorgabe 0..8; gesuchte Zahl 6.

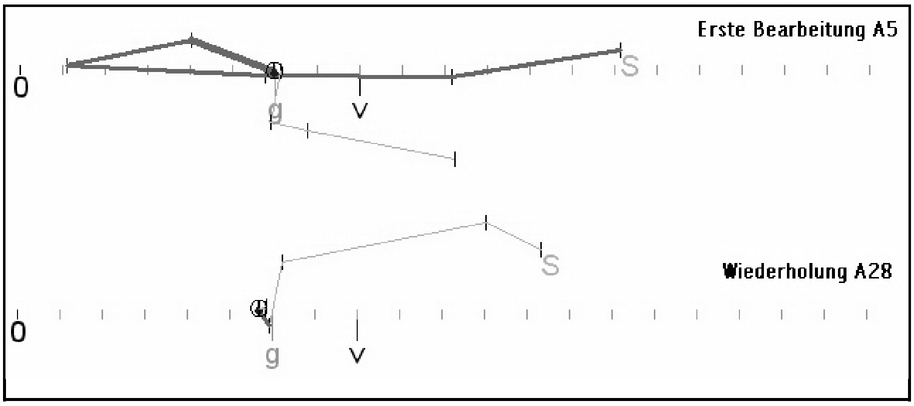


Abb. 4.51: Mikrowelt zstrich0 - Bearbeitung Aufg. z5-28-079

Bei Aufgabe 5 orientiert sich der Schüler zunächst an Null und geht dann vorwärts zur gesuchten Zahl 6. Bei der Lösung von Aufgabe 28 wird der Mauszeiger direkt zu 6 bewegt.

▾ *Lerneffekte während der Bearbeitung zeigen sich in genaueren, verkürzten Strategien und weniger Klicks bis zur Lösung. Im Idealfall gehen die Kinder zu Direktstrategien über.*

4.4.9 Entwicklung einzelner Kinder

In diesem Unterkapitel werden noch einmal 4 Kinder bei ihrer Arbeit in den verschiedenen Mikrowelten dargestellt. Hierzu wurden die vollständigen Bearbeitungen von je zwei Schülern und Schülerinnen, jeweils aus dem oberen und unterem Leistungsviertel, gemessen bei den mathematischen Leistungstests, ausgewählt. Dies soll dazu dienen:

- zu zeigen, wie Entwicklungsverläufe beim Operieren am Zahlenstrahl in den Mikrowelten und am mentalen Zahlenstrahl aussehen.
- zu zeigen, welche Unterschiede zwischen leistungsstarken und leistungsschwachen Schülern beim mentalen Operieren bestehen.
- zu zeigen, dass die Mikroweltenumgebung geeignet ist, individuelle qualitative Aussagen zu einzelnen Kindern zu machen.

Die Anzahl der Bearbeitungen ist bei den ausgewählten Kindern unterschiedlich, was daher rührt, dass vor allem schlechtere Schüler nicht alle Mikrowelten durchgearbeitet haben, während die guten Schüler einzelne Mikrowelten sogar doppelt bearbeiteten.

a) Daten 118 (Marco)

Alter	6
Geschlecht	m
Computer zu Hause	ja
eigenen Computer	nein

	Pkte
Eingangsuntersuchung	9
Eingangsstunde	19
Schlussuntersuchung	23
Note Klasse 2	-

Marco hat in der Eingangsuntersuchung und in der Einführungsstunde sehr wenige Punkte erreicht und lag damit im unteren Viertel. Beim Abschlusstest erreichte er 23 Punkte und liegt damit knapp über dem unteren Viertel, aber immer noch in der unteren Hälfte der Versuchspersonen. Er gab an, zu Hause einen Computer zu haben und damit zu spielen. Nahezu alle visualisierten Bearbeitungsprotokolle der Mikrowelten zeigen aber, dass er grosse Probleme hat, die Maus zu positionieren, deshalb kann man annehmen, dass er noch nicht mit der Maus am Computer gearbeitet hat, seine Angaben bezüglich der Computernutzung also falsch waren. Marco hat die Mikrowelten zstrich0 und zstrich1 bearbeitet. Für die dritte Mikrowelt liegt keine Bearbeitung vor.

Protokolle der Bearbeitung; Mikrowelt zstrich0:

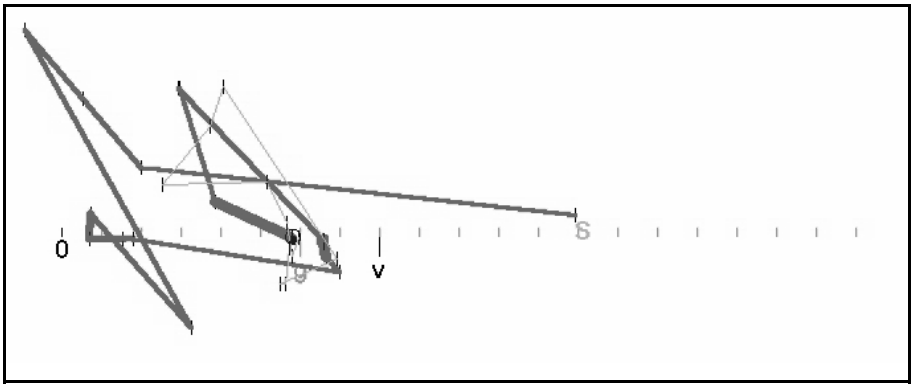


Abb. 4.52: Mikrowelt zstrich0 - Bearbeitung Aufg. z5-118

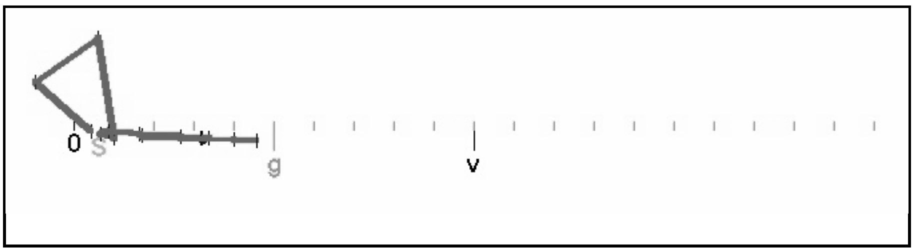


Abb. 4.53: Mikrowelt zstrich0 - Bearbeitung Aufg. a12-118

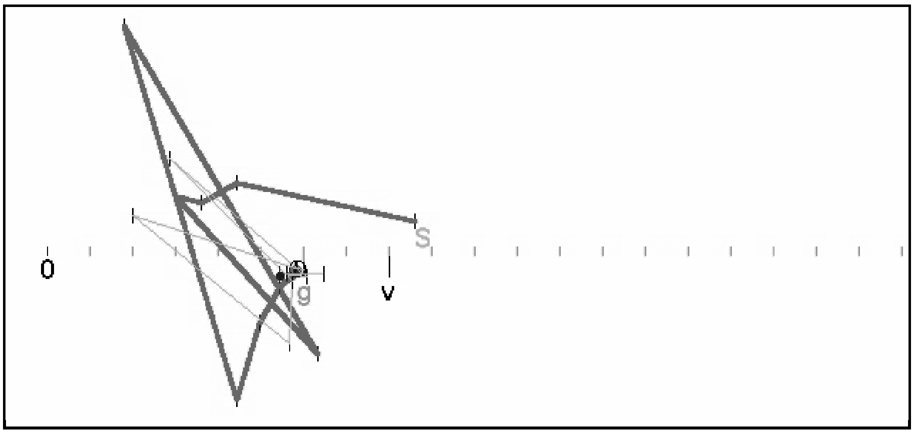


Abb. 4.54: Mikrowelt zstrich0 - Bearbeitung Aufg. z28-118

Marko nutzt für die Bearbeitung der Aufgaben in Mikrowelt zstrich0 nicht die in der Einführungsstunde vorgegebene Strategie 'Vorwärtszählen ab Null'. Er versucht die Zahl mit dem Mauszeiger direkt anzusteuern und hat damit bei Aufgabe 5 und Aufgabe 28 Erfolg. Aufgabe 12, bei der sich eine Zählstrategie zeigt, bricht er ab.

Protokolle der Bearbeitung Mikrowelt zstrich1:

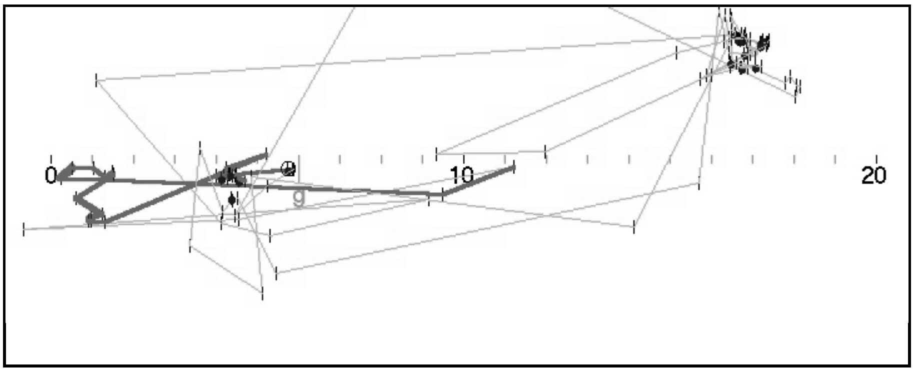


Abb. 4.55: Mikrowelt zstrich1 - Bearbeitung Aufg. a5-118

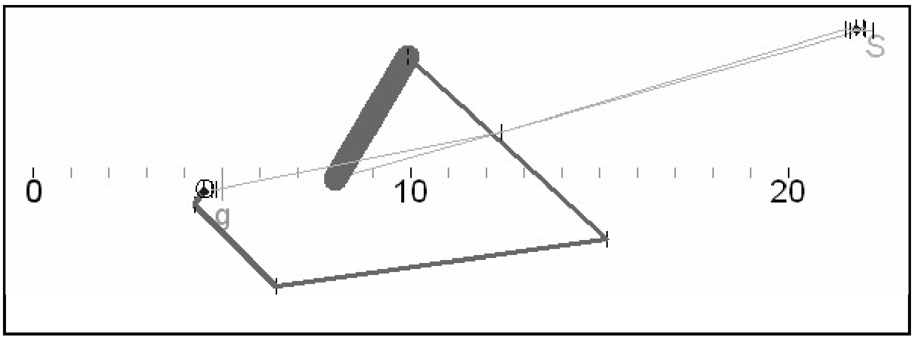


Abb. 4.56: Mikrowelt zstrich1 - Bearbeitung Aufg. a12-118

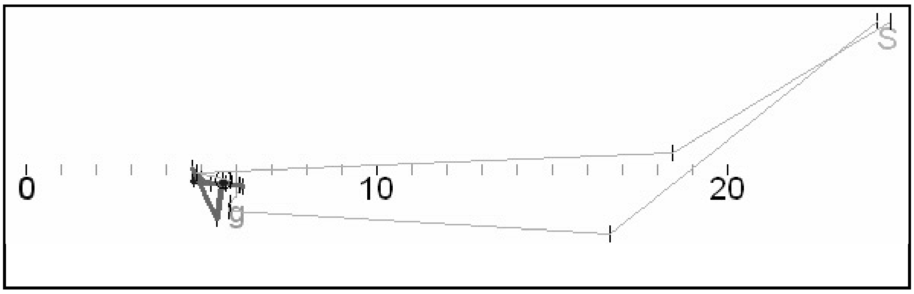


Abb. 4.57: Mikrowelt zstrich1 - Bearbeitung Aufg. a28-118

Bei den Aufgaben in Mikrowelt zstrich1 zeigt Marco eine positive Entwicklung. Auffallend ist, dass alle drei Bearbeitungen in der rechten oberen Ecke beginnen. Das ist der Ort, an dem der zu suchende Schatz angezeigt wird, bevor dieser am Zahlenstrahl versteckt wird. Bei Aufgabe 5 versucht Marco deshalb den Schatz an dieser Stelle durch Klicks wieder sichtbar zu machen. Er hat also den Aufgabenkontext nicht vollständig verstanden.

Bei Aufgabe 12 klickt er nur einmal an dieser Stelle und positioniert dann den Mauszeiger am Zahlenstrahl. Hier macht er eine längere Pause und führt dann die Maus im Bogen gezielt zur richtigen Stelle am Zahlenstrahl. Er klickt und findet die Zahl 5.

Bei Aufgabe 28 bewegt er die Maus direkt zu 5, klickt dort und korrigiert sich, indem er einem Schritt vorwärts Richtung 10 macht und dann bei 6 klickt.

Bei den drei Bearbeitungen von Marco sieht man sehr schön, wie im Laufe der Zeit die Mausbewegung zielgerichteter und genauer wird, wie sich die Motorik anpasst und damit eine genaue Umsetzung der mentalen Vorstellungen ermöglicht.

b) Daten 164 (Chiara)

Alter	6
Geschlecht	w
Computer zu Hause	nein
eigenen Computer	nein

	Pkte
Eingangsuntersuchung	9
Eingangsstunde	21
Schlussuntersuchung	7
Note Klasse 2	-

Chiara hat nach eigenen Angaben noch nie mit einem Computer gearbeitet. In der Eingangsuntersuchung wie auch in der Schlussuntersuchung lagen ihre Punktzahlen im unteren Viertel, in der Einführungsstunde knapp darüber.

Protokolle der Bearbeitung; Mikrowelt zstrich0:

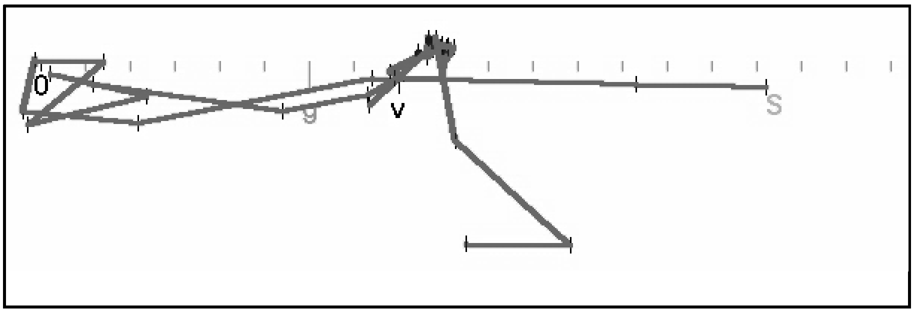


Abb. 4.58: Mikrowelt zstrich0 - Bearbeitung Aufg. z5-164

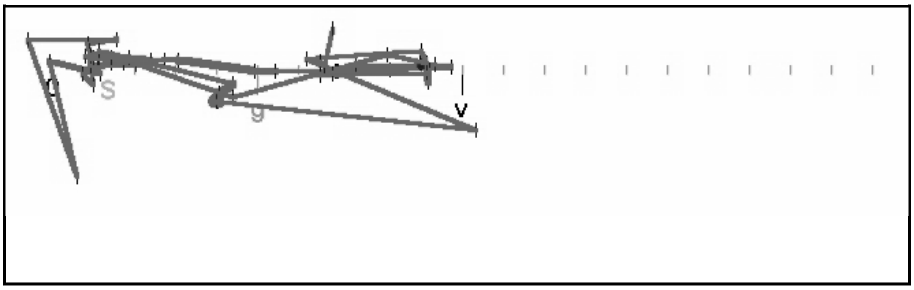


Abb. 4.59: Mikrowelt zstrich0 - Bearbeitung Aufg. z12-164

Sowohl bei Aufgabe 5 (Abb. 4.58), als auch bei Aufgabe 12 (Abb. 4.59) zeigen sich große Positionierungsprobleme. Chiara schafft es nur mit Mühe, den Mauszeiger zu Null zu bewegen.

Bei Aufgabe 5 variiert die Schrittweite sehr stark, so dass der erste Klick bei 9 erfolgt, also jenseits der Vorgabezahl. Die Schülerin versucht danach in dieser Umgebung die Zahl mit weiteren Klicks zu finden, bricht dann aber ihre Bearbeitung ab.

Bei Aufgabe 12 gelingt das schrittweise Bewegen der Maus schon besser, aber auch hier wird der mathematische Kontext (Vorgabezahl und gesuchte Zahl) nicht beachtet. Es erfolgt ein Klick bei 9, dann bricht die Bearbeitung ab.

Beide Bearbeitungen zeigen ein Phänomen, das man bei verschiedenen Kindern, die keine oder wenig Computererfahrung haben, beobachten kann. Diese Kinder konzentrieren sich so stark auf die Bedienung des Systems, dass sie die eigentliche Aufgabe, nämlich das Suchen der Zahl, ganz aus dem Blick verlieren. Aus diesem Grund kann man auch kaum gesicherte Aussagen zur Zahlenstrahlvorstellung bzw. zum mentalen Zahlenstrahl von Chiara machen.

Protokolle der Bearbeitung; Mikrowelt zstrich1:

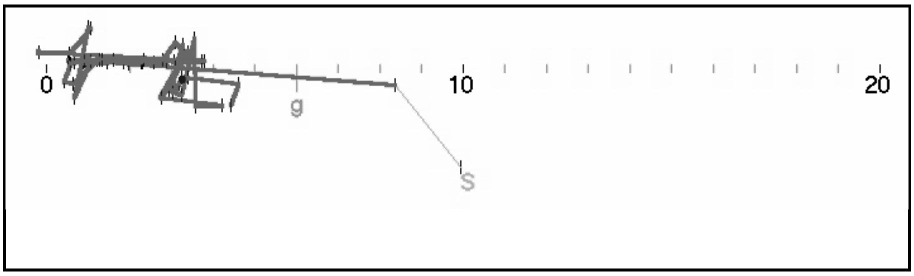


Abb. 4.60: Mikrowelt zstrich1 - Bearbeitung Aufg. a5-164

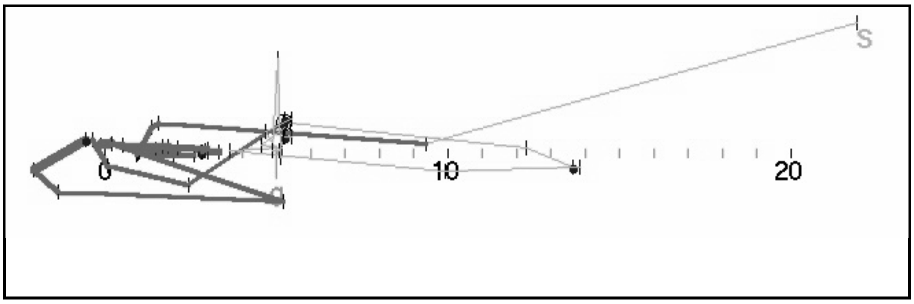


Abb. 4.61: Mikrowelt zstrich1 - Bearbeitung Aufg. a12-164

Bei der Bearbeitung von Mikrowelt zstrich1 zeigen sich in Aufgabe 5 (Abb. 4.60) erste Ansätze einer schrittweisen Strategie ab Null. Chiara versucht mehrmals von Null aus, die Maus schrittweise vorwärts zu bewegen. Beim dritten Versuch wird die Maus in 6 Schritten von 1 aus Richtung 10 bewegt. Da die Schrittweite aber zu klein gewählt ist, erfolgt der erste Klick bei 3. Nach einer Neupositionierung der Maus erfolgt ein weiterer Klick an dieser Stelle, dann wird die Bearbeitung abgebrochen.

Dasselbe Muster sieht man bei Aufgabe 12 (Abb. 4.61). Auch hier wird der Mauszeiger bei Null postioniert und dann versucht die Schülerin, mit einer schrittweisen Strategie die Zahl zu finden. Sie macht aber zu kleine Schritte und klickt bei 3 statt bei 5. Dann wird die Maus weiterbewegt und es werden bei Null und bei 5 sowie bei 14 weitere Klicks gesetzt. Es scheint so als ob die Zahl hier zufällig gefunden wurde, da die Bearbeitung nach dem erfolgreichen Klicken nicht abbricht sondern weitergeführt wird.

Auch bei diesen beiden Bearbeitungen scheint es wieder so, als ob die Strategie 'Vorwärtsgehen in Einerschritten' durch geführt wird ohne den Kontext zu beachten, bzw. ohne die eigene mentale Zahlvorstellung zu aktivieren.

Protokolle der Bearbeitung; Mikrowelt zstrich2:

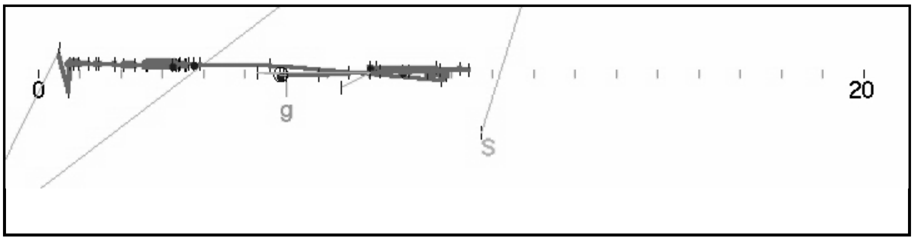


Abb. 4.62: Mikrowelt zstrich2 - Bearbeitung Aufg. b5-164

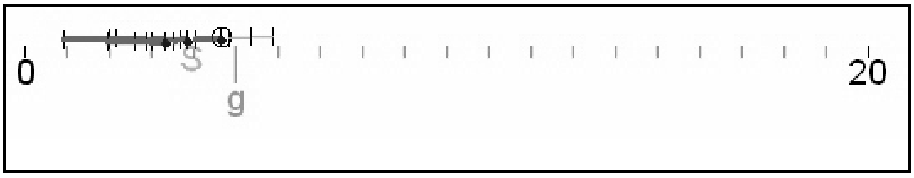


Abb. 4.63: Mikrowelt zstrich2 - Bearbeitung Aufg. b12-164

Die beiden letzten Bearbeitungen von Chiara wurden am 24. April, also in der zweiten Hälfte des Schuljahres angefertigt, wo die Kinder schon im gesamten Zahlenraum bis 20 rechnen. Die Bearbeitungen zeigen immer noch schrittweise Strategien, die Schrittweite ist immer noch nicht mit der Gesamtstrecke und der Gesamtzahl der Schritte koordiniert und deshalb zu kurz. Die Schülerin schafft es aber trotzdem, in beiden Aufgaben die Zahl zu finden, da sie nach dem ersten erfolglosen Mausklick mit weiteren Klicks in die richtige Richtung sucht, bis sie die Zahl gefunden hat. In der ersten Bearbeitung (Abb. 4.62) sieht man außerdem einen Strategiewechsel. Nach erfolgloser Suche ab Null beginnt die Schülerin rückwärts ab 10 zu suchen. Bei diesen beiden Bearbeitungen von Chiara hat man nun den Eindruck, als ob im Hintergrund ein mentales Modell des Zahlenstrahls existiert, das bei der Suche nach der Zahl Orientierung gibt.

c) Daten 201 (Markus)

Alter	6
Geschlecht	m
Computer zu Hause	ja
eigenen Computer	nein

	Pkte
Eingangsuntersuchung	32
Eingangsstunde	-
Schlussuntersuchung	33
Note Klasse 2	-

Markus hat sowohl im mathematischen Eingangstest als auch im Abschlusstest eine hohe Punktzahl erzielt. Er gehört zum oberen Viertel der Untersuchungspopulation. Bei der Einführungsstunde war er krank, trotzdem hat er keine Probleme in den Mikrowelten. Markus hat wie andere Schüler auch die erste Mikrowelt zstrich0 zweimal bearbeitet.

Protokolle der Bearbeitung; Mikrowelt zstrich0:

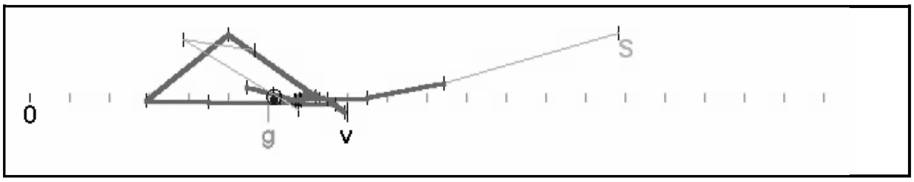


Abb. 4.64: Mikrowelt zstrich0 - Bearbeitung Aufg. z5a-201

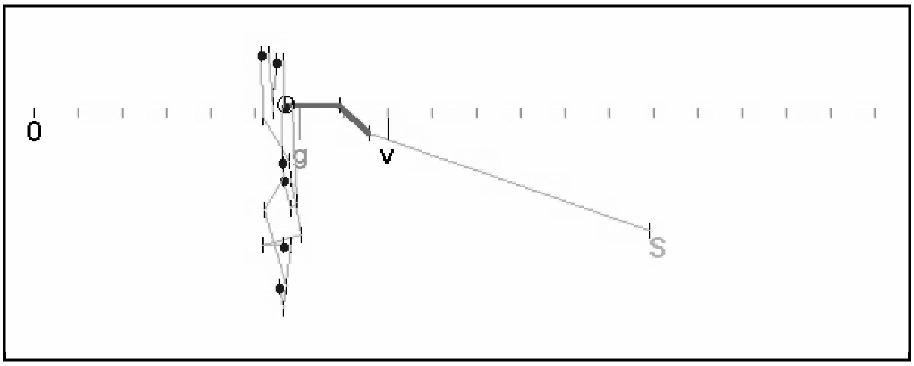


Abb. 4.65: Mikrowelt zstrich0 - Bearbeitung Aufg. z5b-201

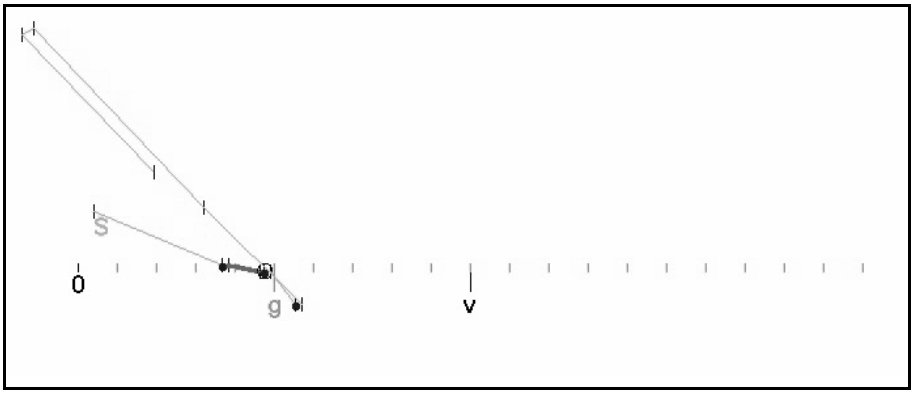


Abb. 4.66: Mikrowelt zstrich0 - Bearbeitung Aufg. z12a-201

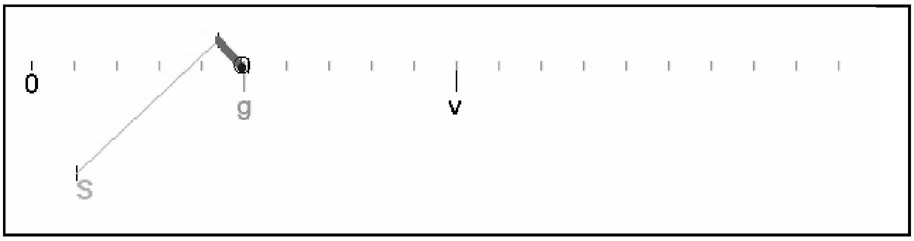


Abb. 4.67: Mikrowelt zstrich0 - Bearbeitung Aufg. z12b-201

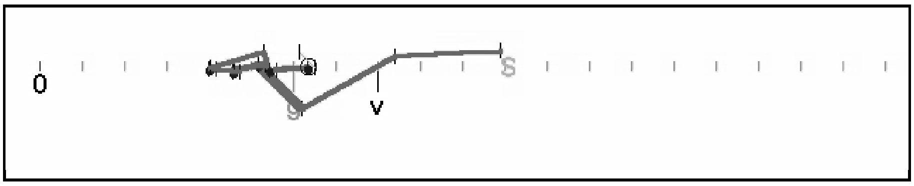


Abb. 4.68: Mikrowelt zstrich0 - Bearbeitung Aufg. z28a-201

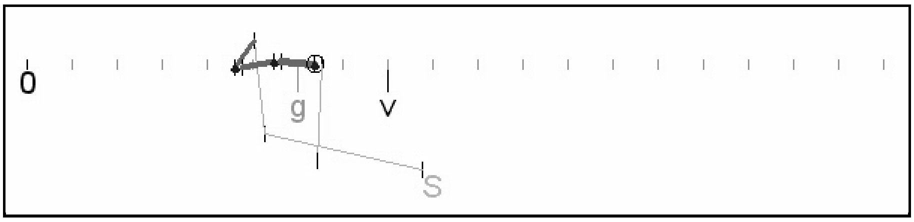


Abb. 4.69: Mikrowelt zstrich0 - Bearbeitung Aufg. z28b-201

Markus hat bei der ersten Bearbeitung (Abb. 4.64) zunächst Positionierungsprobleme. Nachdem er den Mauszeiger bei 8 positioniert hat, bewegt er ihn einen Schritt rückwärts, klickt, bewegt ihn dann noch eine Schritt und klickt bei der gesuchten Zahl. Die zweite Bearbeitung (Abb. 4.65) zeigt dasselbe Muster: ab 8 zwei Schritte rückwärts, dann Klick bei der gesuchten Zahl. Anschließend beginnt Markus aber mit dem Igelbild zu spielen und zu experimentieren. Wahrscheinlich will er herausfinden, bis zu welcher Ungenauigkeit die gesuchte Zahl immer noch angezeigt wird.

Die folgenden beiden Bearbeitungen (Aufgabe 12) zeigen Direktstrategien, die sehr schnell zur richtigen Lösung führen. Bei Aufgabe 28 hat Markus interessanterweise plötzlich wieder größere Probleme, obwohl es dieselbe Aufgabenstellung ist wie bei Aufgabe 5. Er versucht auch hier eine Direktstrategie und platziert die Maus aber zu weit Richtung 0 bei 4. Anschließend korrigiert er dies, indem er mit Klicks Richtung 10 sucht. Die letzte Bearbeitung ist etwas genauer, er muss nur noch zweimal 'Suchen und Klicken' um die Zahl zu finden.

Bei allen Bearbeitungen hat man den Eindruck, dass Markus ein sehr gutes mentales Modell des Zahlenstrahl im Hintergrund hat, das ihm hilft, in den Mikrowelten zu operieren.

Protokolle der Bearbeitung; Mikrowelt zstrich1:

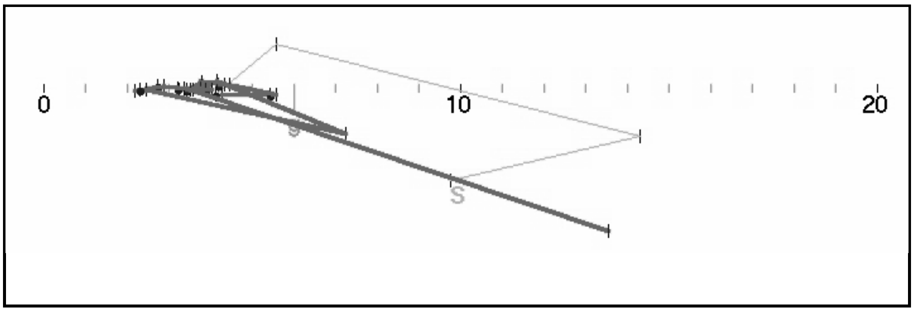


Abb. 4.70: Mikrowelt zstrich1 - Bearbeitung Aufg. a5-201

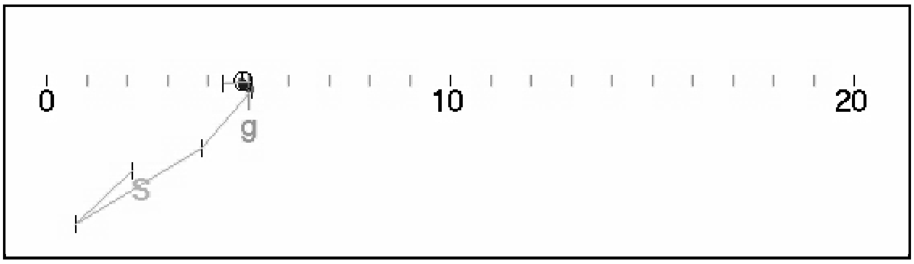


Abb. 4.71: Mikrowelt zstrich1 - Bearbeitung Aufg. a12-201

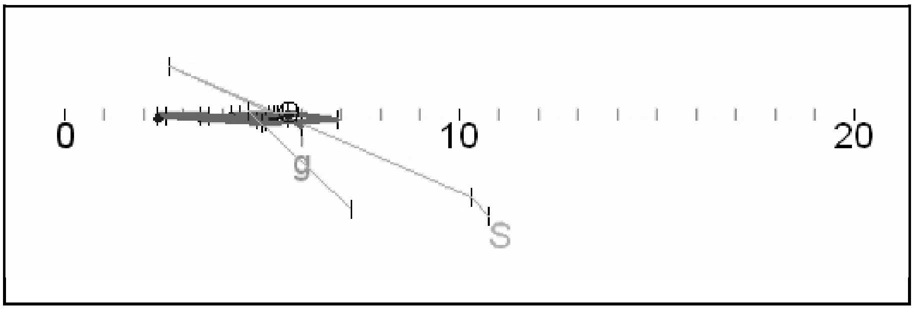


Abb. 4.72: Mikrowelt zstrich1 - Bearbeitung Aufg. a28-201

Die erste Bearbeitung in zstrich1, Aufgabe 5 wird abgebrochen. Der Schüler versucht eine Direktstrategie und klickt bei 4 , danach bei 5 ohne Erfolg. Anschließend sucht er weiter Richtung Null und klickt noch bei 3 und 2 mehrmals, um die Bearbeitung dann abzubrechen. Die zweite Bearbeitung, Vorgabe 10, gesucht ist 5, wird direkt gelöst. Bei Aufgabe 28 sieht man wieder das Bearbeitungsmuster von Aufgabe 5, die ja identisch ist. Der erste Klick erfolgt bei 4, dann bei 5 und schließend wird Richtung Null weitergesucht. Diesmal erfolgt aber kein Abbruch, sondern Markus setzt nun die Suche hinter 5 Richtung 10 fort und findet beim nächsten Mausklick die gesuchte Zahl. Diese Korrektur einer falschen Strategie zeichnet erfolgreiche Schüler aus. Sie versuchen nicht dieselbe untaugliche Strategie immer wieder anzuzwenden, sondern erkennen, wenn die gerade angewandte Strategie nicht mehr erfolgreich sein kann und korrigieren sich dann.

Protokolle der Bearbeitung; Mikrowelt zstrich2:

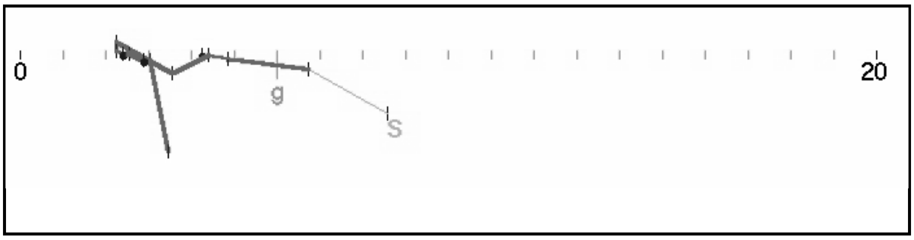


Abb. 4.73: Mikrowelt zstrich2 - Bearbeitung Aufg. b5-201

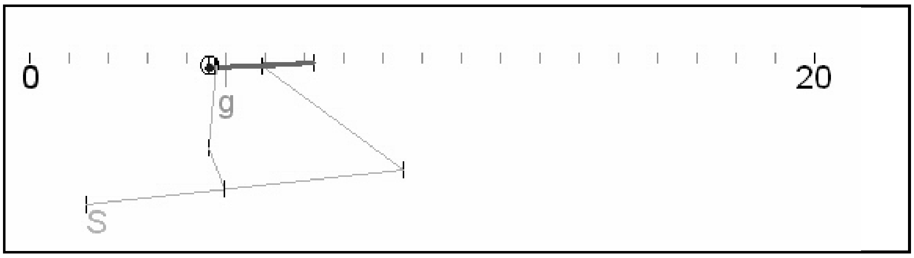


Abb. 4.74: Mikrowelt zstrich2 - Bearbeitung Aufg. b12-201

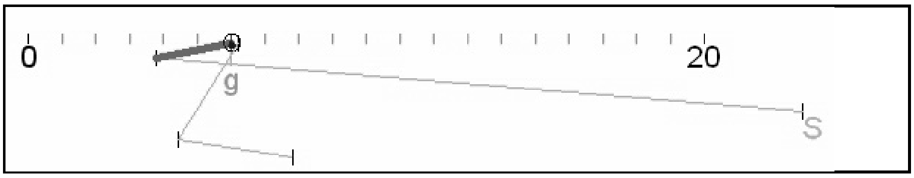


Abb. 4.75: Mikrowelt zstrich2 - Bearbeitung Aufg. b28-201

Auch in Mikrowelt zstrich2 wird die erste Bearbeitung nach kurzer Suche (2 Klicks) wieder abgebrochen. Die letzten beiden Bearbeitungen von Markus zeigen dann aber jeweils Direktstrategien, die beim ersten Mausklick zum Erfolg führen. Bei beiden Bearbeitungen gelingt es Markus sehr genau, die richtige Länge abzuschätzen und den Ort der gesuchten Zahl zu bestimmen. Dahinter steht ein in diesem Bereich bis 20 voll funktionsfähiger mentaler Zahlenstrahl.

d) Daten 174 (Anna)

Alter	6
Geschlecht	w
Computer zu Hause	ja
eigenen Computer	nein

	Pkte
Eingangsuntersuchung	28
Eingangsstunde	17
Schlussuntersuchung	30
Note Klasse 2	-

Anna erreicht im mathematischen Eingangstest und im Abschlusstest jeweils hohe Punktzahlen und gehört damit zum oberen Viertel der untersuchten Kinder. In der Eingangsstunde erreichte sie einen mittleren Wert.

Protokolle der Bearbeitung; Mikrowelt zstrich0:

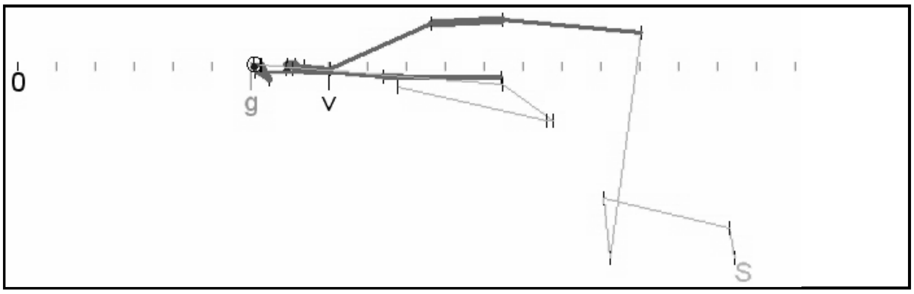


Abb. 4.76: Mikrowelt zstrich0 - Bearbeitung Aufg. z5a-174

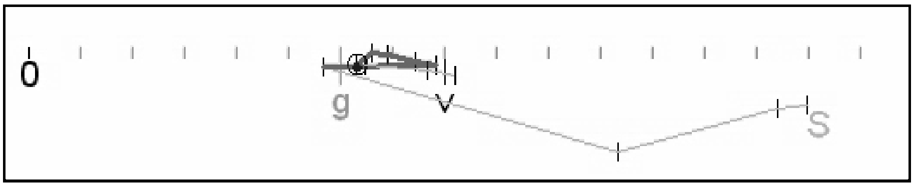


Abb. 4.77: Mikrowelt zstrich0 - Bearbeitung Aufg. z5b-174

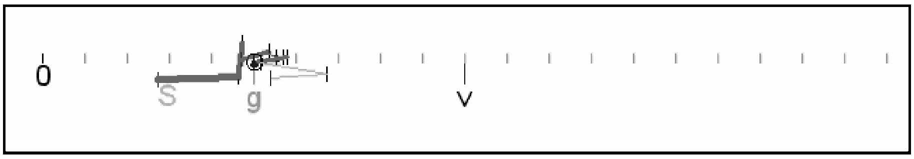


Abb. 4.78: Mikrowelt zstrich0 - Bearbeitung Aufg. z12a-174

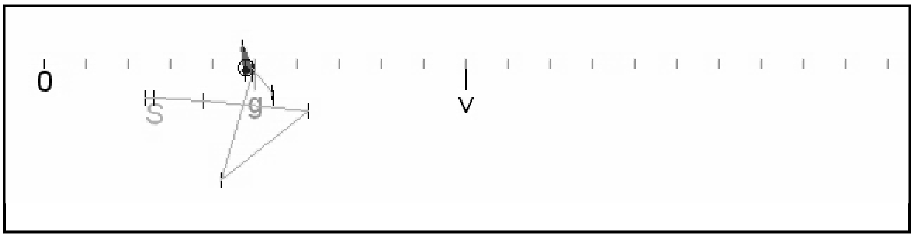


Abb. 4.79: Mikrowelt zstrich0 - Bearbeitung Aufg. z12b-174

Abb. 4.80: Mikrowelt zstrich0 - Bearbeitung Aufg. z28a-174

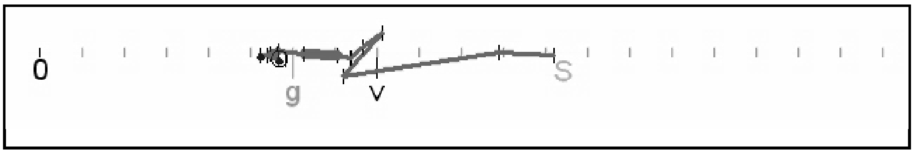


Abb. 4.81: Mikrowelt zstrich0 - Bearbeitung Aufg. z28b-174

Anna hat genau wie viele andere Kinder zunächst Bedienprobleme. Es gelingt nur mit Mühe, den Mauszeiger bei 8 zu positionieren. Dann geht Sie mit zwei zu kleinen Schritten zurück zu 7 und klickt. Sie korrigiert sich, bewegt die Maus weiter bis 6 und findet die gesuchte Zahl. Bei der zweiten Bearbeitung (Abb. 4.76) geht sie zunächst direkt zur gesuchten Zahl, korrigiert sich dann aber und setzt den Mauszeiger auf die Vorgabezahl. Von dort geht sie in Schritten zur gesuchten Zahl und schließt die Suche mit einem Mausklick ab. Aufgabe 12 wird in beiden Bearbeitungen mit einer Direktstrategie gelöst. Aufgabe 28 wird wie Aufgabe 5 jeweils durch Rückwärtsgehen ab der gesuchten Zahl bearbeitet.

Bei allen Bearbeitungen von Anna zeigt sich eine sehr gute mentale Vorstellung. Für fast alle Aufgaben benötigt sie jeweils nur einen Klick auf die gesuchte Zahl, ihre Rekonstruktionen des Zahlenstrahls sind sehr genau.

Protokolle der Bearbeitung; Mikrowelt zstrich1:

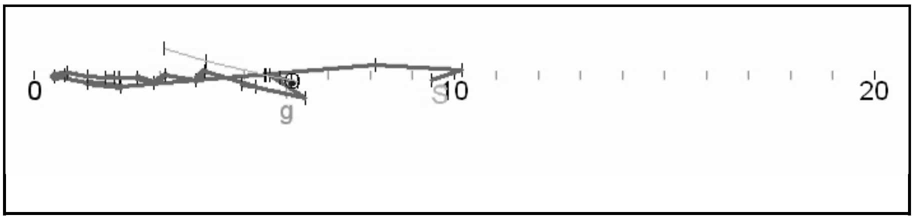


Abb. 4.82: Mikrowelt zstrich1 - Bearbeitung Aufg. a5-174

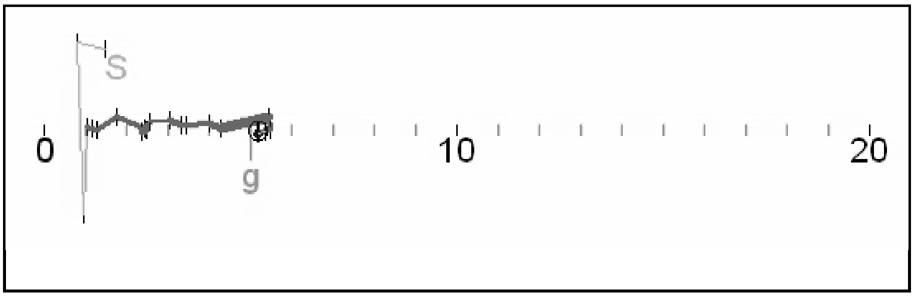


Abb. 4.83: Mikrowelt zstrich1 - Bearbeitung Aufg. a12-174

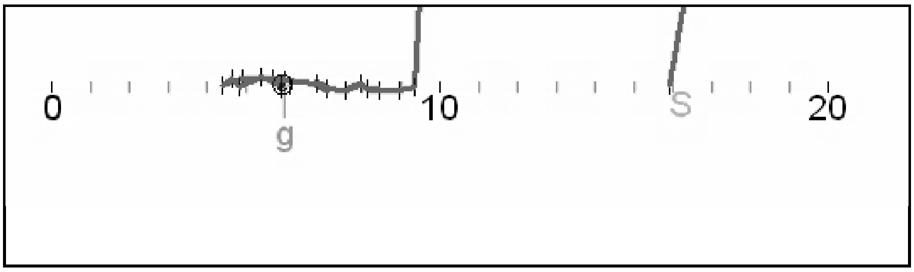


Abb. 4.84: Mikrowelt zstrich1 - Bearbeitung Aufg. a28-174

Bei dieser Aufgabe orientiert sich die Schülerin zunächst an 10, bewegt dann die Maus am Zahlenstrahl entlang bis Null und beginnt dort mit einer schrittweisen Strategie vorwärtszugehen. Nach einer kleinen Korrektur klickt sie exakt auf die gesuchte Zahl. Die zweite Bearbeitung beginnt sofort bei Null und läuft dann genau nach demselben Muster ab. Die dritte Aufgabe wird wieder ab 10 bearbeitet. Nach einer Rückwärtsbewegung mit Korrektur findet Anna die gesuchte Zahl beim ersten Klick. Auch hier werden die Verhältnisse 0 .. 10 .. gesuchte Zahl wieder genau abgeschätzt.

Protokolle der Bearbeitung; Mikrowelt zstrich2:

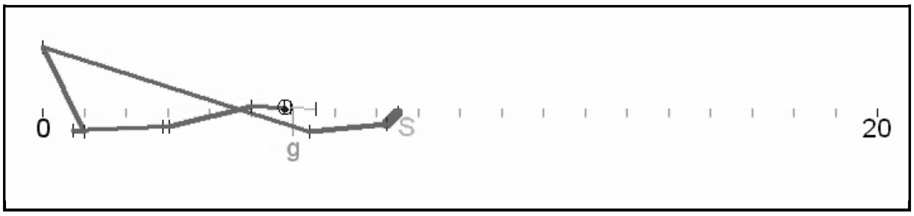


Abb. 4.85: Mikrowelt zstrich2 - Bearbeitung Aufg. b5-174

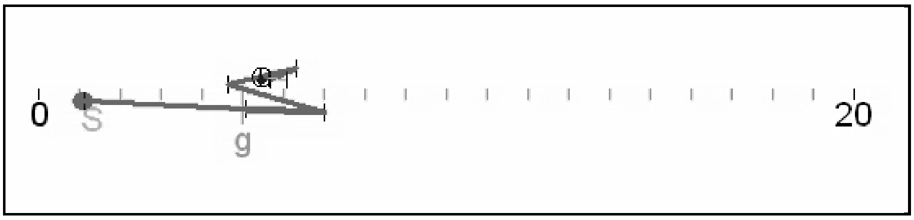


Abb. 4.86: Mikrowelt zstrich2 - Bearbeitung Aufg. b12-174

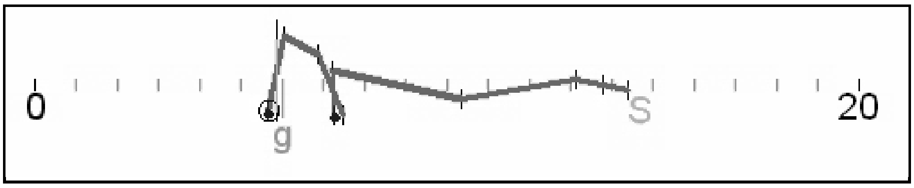


Abb. 4.87: Mikrowelt zstrich2 - Bearbeitung Aufg. b28-174

In der letzten Mikrowelt bleiben nur noch 0 und 20 zur Orientierung. Aber auch hier gelingt es Anna bei den ersten beiden Aufgaben, ausgehend von Null, die gesuchte Zahl beim ersten Klick exakt zu treffen. Bei der letzten Bearbeitung fehlt die Orientierung an 0. Die Schülerin versucht in der Rückwärtsbewegung die Zahl zu treffen und klickt bei 7. Nach einem Korrekturschritt ist die Zahl dann gefunden.

Zusammenfassend kann man nach der Darstellung der Bearbeitungen dieser vier Kinder deutliche Unterschiede zwischen den beiden leistungsstarken und den beiden leistungsschwächeren Kindern festellen.

- *Leistungsschwächere Kinder suchen ohne Strategie bzw. halten an nicht zielführenden Strategien fest. Sie sind nicht sehr flexibel in ihrer Strategiewahl.*
- *Leistungsschwächere Kinder brauchen viele Mausklicks, um eine Lösung zu finden. Ihre Bearbeitungen zeichnen sich durch eher zielloses Herumsuchen aus.*
- *Bei leistungsschwächeren Kindern bilden sich Direktstrategien nur langsam aus.*
- *Leistungsstarke Kinder finden die gesuchte Zahl schnell, sie brauchen wenig Mausklicks.*

- *Leistungsstarke Kinder sind in ihrer Strategiewahl sehr flexibel. Sie erkennen untaugliche Strategien. Sie suchen je nach Anforderung vorwärts oder rückwärts.*
- *Leistungsstarke Kinder gehen relativ schnell zu Direktstrategien über. Sie können ihren mentalen Zahlenstrahl gut in die Mikrowelt integrieren.*

4.5 Schlussuntersuchung

Für die Messung der mathematischen Leistung am Ende der Untersuchungsphase wurde ein normierter Leistungstest (DEMAT1+, 2002) verwendet. Der DEMAT wird als Gruppentest in einer Unterrichtstunde im Klassenzimmer (A und B Form) durchgeführt. Die Inhaltsschwerpunkte (Subtests) des DEMAT sind:

- Mengen-Zahlen (MZ)
- Zahlenraum (ZR)
- Addition (AD)
- Subtraktion (SU)
- Zahlenzerlegung-Zahlenergänzung (ZZ)
- Teil-Ganzes (TG)
- Kettenaufgaben (KA)
- Ungleichungen (UG)
- Sachaufgaben (SA)

Die Ergebnisse unserer Testgruppe liegen genau in den Normwerten für die erste Klasse (letzter Schuljahresmonat). Die Normen geben für die mittleren 50% Kinder Punktwerte von 21 bis 30 vor, unsere Gruppe hat Werte von 21 bis 31 erreicht. Das arithmetische Mittel der Normpopulation liegt bei 25,1 - in unseren Klassen bei 26,0. Die Standardabweichung der Norm liegt bei 7,17 - bei der CEKA-Untersuchung ist s=7,25.

Die Boxplots der Subtests (Abb. 4.14) zeigen das Problem des DEMAT1+, alle Subtests sind rechtsschief verteilt, trennen also in den Teilbereichen die leistungsstarken Kinder nicht sehr scharf, so dass Aussagen zu Leistungen in einzelnen Teilbereichen nicht besonders aussagekräftig sind. Verschärft wird dies durch die geringe Breite der Punkteverteilung (min. 0 - max. 5) in den Subtests. Die oberen Hälften aller Ergebnisse unterscheiden sich meist nur um einen Punkt.

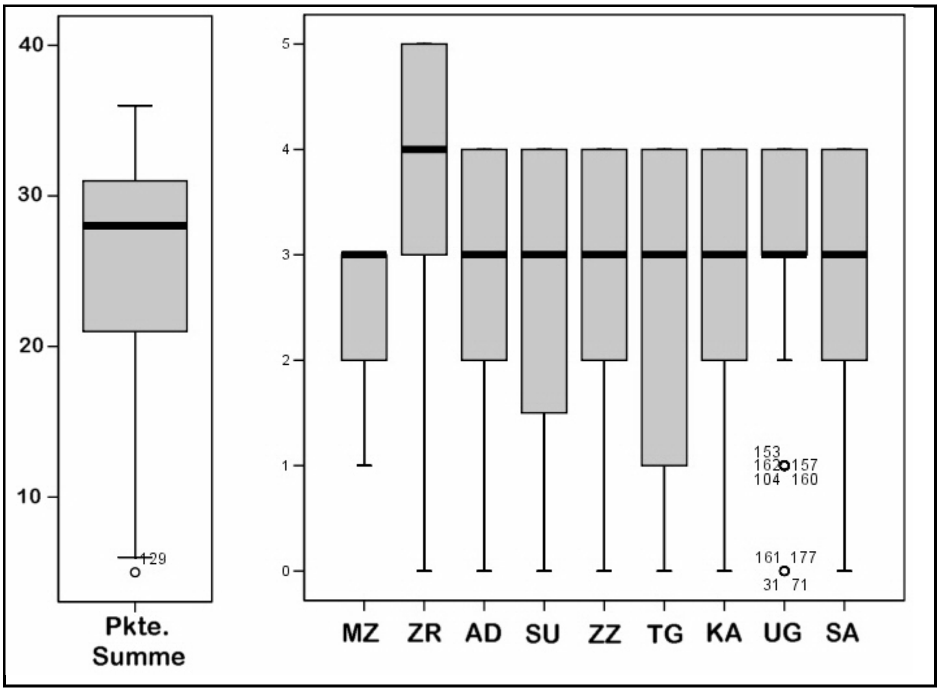


Abb. 4.88: Mikrowelt zstrich0 - Verteilung und Häufigkeiten

Weitere Informationen zum DEMAT 1+, sowie eine Beschreibung der Aufgabengruppen kann man in den Testunterlagen [a.a.O.] nachlesen.

4.6 Zusammenfassung

Mit den Daten aus den Computerprotokollen und statistischen Mitteln kann man genau das beschreiben, was auch bei der direkten Beobachtung einzelner Kinder während ihrer Bearbeitung der einzelnen Aufgaben in den Mikrowelten festgestellt werden kann. Allerdings ist das Bild vom mentalen Operieren durch die Beschränkungen der automatischen Auswertung der Computerprotokolle doch noch sehr allgemein und nicht geeignet, die individuellen Strategien einzelner Kinder bei der Bearbeitung der verschiedenen Aufgaben aufzudecken. Die quantitative Auswertung der Daten zeigt eher allgemeine Grundmuster und Vorgehensweisen wie z.B., dass die Wahl der Direktstrategie (Strategie 3) zusammenhängt mit der häufig richtigen Bearbeitung der Aufgaben oder dass die häufige Wahl der Zählstrategie (Strategie 1) weniger häufig zu richtigen Ergebnissen führt. Damit lassen sich zwar allgemeine Aussagen zur mentalen Zahlvorstellung machen, man erhält aber keine Hinweise, um einzelne Kinder gezielt fördern oder unterstützen zu können.

Individuelle Strategien können nur erkannt werden, wenn man sich zusätzlich zu den kumulierten Daten gezielt die Visualisierungen der Protokolle einzelner Kinder ansieht. Erst dann zeigen sich qualitative Unterschiede der Bearbeitungen und verschiedene individuelle Strategien der einzelnen Kinder. Hier erkennt man dann Entwicklungen in den individuellen Strategien, aber auch Brüche dieser Entwicklungslinien und Grenzen der individuellen mentalen Modelle. So werden die Protokolle der Bearbeitungen zusammen mit den Visualisierungen ein Diagnoseinstrument für Lehrkräfte um gezielt individuelles Lernen zu untersuchen und Defizite bei den Kindern aufzuspüren.

5 Zusammenfassung und Gesamtdiskussion

5.1 Mathematische Leistungstests

Zwischen den, im Laufe der Untersuchung durchgeführten Tests lassen sich für die Kinder zwischen Eingangstest (eu) und Abschlusstest (su) sowie zwischen Eingangstest und Einführungsstunde (es) schwache, aber hoch signifikante Korrelationen nachweisen. Keine Ergebnisse bringt ein Vergleich von Einführungsstunde und Abschlusstest. In der folgenden Tabelle (Tab. 5.01) sind alle signifikanten Korrelationen zwischen den Teilbereichen der drei Tests dargestellt.

n = 179	Einführungsstunde (es)			Abschlusstest (su)
Eingangstest (eu)	gesamt	Schrittzahl	Proportionalität	gesamt
Merkmale..	,250**	,198**	,247**	,346**
Längenrel...	,153*	*,109*	,159*	,342**
Längenanz...	,303**	,173*	**,325****	,318**
Zählen	,265**	,175*	,267**	**,433****
gesamt	,336**	,231**	,244**	,482**
Gruppentest	,302**	,202**	,310**	,392**
Einzeltest	,240**	,156*	,242**	**,462****

* Korrelation ist signifikant auf dem 0.05 Niveau.
** Korrelation ist signifikant auf dem 0.01 Niveau.

Tab. 5.01: Eingangstest - Einführungsstunde - Abschlusstest: Korr.

5.1.1 Eingangsuntersuchung und Einführungsstunde

Auffällig ist, dass die Leistungen in der Einführungsstunde vor allem mit den Teilbereichen 'Merkmale erkennen', 'Längen vs. Anzahlen schätzen' und 'Zählen' aus dem Eingangstest korrelieren. Das Erkennen der Proportionalität, also der richtigen Schrittlänge im Zusammenhang von Gesamtstrecke und Schrittzahl, scheint hauptsächlich von diesen drei Faktoren bestimmt zu werden, wobei der Teilbereich Längen vs. Anzahlen schätzen können den höchsten Wert (r=0,325**) aufweist. Hier sind es besonders die Aufgaben eu07 (Eins-zu-Eins-Zuordnung: r=0,235**), eu23 (Längenvergleich Würfelturm und Würfelschlange: r=0,241**)) und eu35 (Zuglänge mit Cuisenaire-Stäben abschätzen: r=0,238**).

Auffällig ist auch, dass zwischen dem Teilbereich Zählen und der richtigen Schrittzahl in der Einführungsstunde kein Zusammenhang nachgewiesen werden kann. Dies mag daran liegen, dass in der Einführungsstunde nur Schrittzahlen im Bereich bis 10 produziert werden mussten und als Zählstrategie nur das Vorwärtszählen in Einerschritten gebraucht wurde. Diese minimalen Anforderungen bewältigen nahezu alle Kinder. Unterschiede zwischen den einzelnen Kindern werden deshalb erst im mathematischen Leistungstest deutlich, wo die Anforderungen an die Zählfertigkeiten verschiedene Niveaus haben.

Indikatoren für gute Ergebnisse insgesamt, in der Eingangsuntersuchung und in der Einführungsstunde, sind die Aufgaben eu09 (Zuckerstangen nach Merkmalen ordnen), die Linealaufgabe eu25, Aufgabe eu30 (bis 14 in Zweierschritten zählen) und wieder eu35 (Zuglänge mit Cuisenaire-Stäben abschätzen). Alle Aufgaben zeigen schwache, aber hoch signifikante Korrelationen in allen Variablen.

n = 179	Einführungsstunde (es)		
Eingangstest (eu)	gesamt	Schrittzahl	Proportionalität
eu09	,231**	,222**	,227**
eu25	,207**	,204**	,192**
eu30	,235**	,227**	*,168**
eu35	,229**	*,172**	,238**

* Korrelation ist signifikant auf dem 0.05 Niveau.
** Korrelation ist signifikant auf dem 0.01 Niveau.

Tab. 5.02: Eingangstest - Einführungsstunde Korr. Aufgaben

- *Kinder mit guten Ergebnissen in den Aufgabengruppen 'Zählen', 'Längen vs. Anzahlen schätzen' und 'Merkmale erkennen' sind auch erfolgreich beim Teiltest 'Proportionalität' der Einführungsstunde.*

5.1.2 Eingangsuntersuchung und Abschlusstest

Die im Vergleich zum Gruppentest höhere Korrelation zwischen den Einzeltests der Eingangsuntersuchung und dem Abschlusstest (r=0,462**) lässt sich dadurch erklären, dass die Mehrzahl der Aufgaben zum Zählen in Einzeltests bearbeitet wurden.

Für gute Ergebnisse im Abschlusstest scheinen gute Zählfertigkeiten beim Eingangstest (r=0,433**), die über das reine Vorwärtszählen hinausgehen, eine wesentliche Voraussetzung zu sein. Hierauf weisen die Einzelaufgaben eu30 ('Zähle bis 14 in Zweierschritten': r=0,410**) und eu32 (ab 17 rückwärts zählen: r=0,514**) hin, die signifikant hohe Korrelationen zeigen. Im Vergleich der Daten aus dem allgemeinen Teil der Eingangsuntersuchung mit den anderen beiden Untersuchungen fällt nur auf, dass die Ergebnisse in der Schlussuntersuchung mit dem Geschlecht (r= -0,289**) korrelieren (s.u.). Wenn im Haushalt ein Computer vorhanden ist, dann hat dies einen geringen positiven Einfluss auf die Ergebnisse des Abschlusstests (r=0,261**).

Korrelationen zwischen den Teilbereichen des Eingangstests und den Aufgabengruppen des Abschlusstests sind in der folgenden Tabelle dargestellt:

n = 186	Eingangstest (eu)			
Abschlusstest (su)	Merkmale..	Längenrel...	Längenanz...	Zählen
Mengen-Zahlen (MZ)	,226**	,148*	,267**	,266**
Zahlenraum (ZR)	**,329****	**,376****	**,347****	**,270****
Addition (AD)	,197**	,147*	,148*	,323**
Subtraktion (SU)	,166*	*,116*	*,085*	,185*
Zahlenzerlegung.. (ZZ)	,183*	,244**	,179*	,337**
Teil-Ganzes (TG)	,290**	,351**	,306**	**,370****
Kettenaufgaben (KA)	*,117*	*,088*	*,077*	,168*
Ungleichungen (UG)	*,076*	*,123*	*,134*	216**
Sachaufgaben (SA)	**,322****	,266**	,225**	315**

* Korrelation ist signifikant auf dem 0.05 Niveau.
** Korrelation ist signifikant auf dem 0.01 Niveau.

Tab. 5.03: Eingangstest - Abschlusstest: Korr.

Wie zu erwarten gibt es zwischen den Bereichen, die im Eingangstest geprüft wurden und den entsprechenden Bereichen des Abschlusstests schwache, aber hoch signifikante Korrelationen. Besonders die Aufgaben zum Zahlenraum (ZR), bei denen über die Zuordnung von Zahlen an den Zahlenstrahl die Orientierung im Zahlenraum erfasst wird, zeigen eine gute Übereinstimmung mit allen vier Bereichen des Eingangstests. Den höchsten Wert erhält man zwischen den Teilbereichen 'Zahlenraum' (ZR) und 'Längenrelationen erkennen und schätzen' (r=0,376**). Hier sind es besonders die Aufgaben eu11 (Stöckchenlänge und Hundegröße: r=0,263**) und eu19 (Längenvergleich Strecke und nicht orientierte Bleistifte: r=0,286**) des Eingangstests. Bei beiden Aufgaben müssen mehrere Merkmale berücksichtigt werden, um die gewünschte Ordnung in Gedanken herstellen zu können.

Die Sachaufgeben des Abschlusstests (SA) waren Bildsachaufgaben, so dass es nicht verwundert, wenn zum Teilbereich 'Merkmale erkennen' der Eingangsuntersuchung ein Zusammenhang besteht (r=0,322**).

Auch der Zusammenhang zwischen dem Bereich Teil-Ganzes (TG) und dem Bereich 'Zählen' (r=0,370**) lässt sich vom Aufgabentyp her erklären. 'Teil-Ganzes' wird über Platzhalteraufgaben (z.B.: 5+_=6+2 oder 9-3=_+2) getestet. Diese Aufgaben lösen die Kinder durch Vorwärts-Rückwärts-Zählen.

Entsprechend zeigt auch Teilaufgabe eu32 (Rückwärtszählen ab 17: r=0,394**) die höchste Korrelation mit TG.

- *Gute Fertigkeiten im Teiltest 'Zählen' der Eingangsuntersuchung sind eine Grundlage für eine zukünftige positive Entwicklung.*
- *Besonders Kinder mit weitergehenden Zählfertigkeiten (bis 14 in Zweierschritten, Rückwärtszählen ab 17) sind auch beim Abschlusstest erfolgreich.*

5.1.3 Mathematiknoten in Klasse 2 und Testergebnisse

Die Mathematiknoten von 41 Kindern der Testgruppe, erhoben am Ende der 2. Klasse, weisen mittlere Korrelationen mit den Ergebnissen des Abschlusstests am Ende der 1. Klasse (r=0,672**), sowie mit dem Eingangstest (r=0,572**) auf. Beim Eingangstest sind es die Bereiche 'Längen schätzen' (r=0,483**) und wieder der Bereich 'Zählen' (r=0,460**). Die guten Kenntnisse und Fähigkeiten in diesen Bereichen, die manche Kinder schon zu Beginn der ersten Klasse haben, bilden anscheinend eine Basis für die weitere erfolgreiche Entwicklung mathematischer Leistung im ersten und zweiten Schuljahr. Umgekehrt könnte man auch folgern, dass Schule nicht kompensatorisch arbeitet. Der schulische Unterricht schafft es anscheinend nicht, die Defizite beim Zählen und anderen mathematischen Fähigkeiten, die zu Beginn der Schullaufbahn schlecht entwickelt sind, so aufzufangen, dass diese Kinder in der Entwicklung ihrer mathematischen Fähigkeiten nicht benachteiligt werden.

- *Sogar noch am Ende von Klasse 2 sind die Kinder erfolgreich, die beim Teiltest 'Zählen' der Eingangsuntersuchung erfolgreich waren.*

5.2 Computerarbeit und mathematische Leistung

5.2.1 Strategien am Computer und mathematische Leistungstests

Zwischen den, in den Mikrowelten festgestellten Strategien der Kinder und den mathematischen Leistungstests kann man wenige, schwache, aber signifikante Effekte beobachten. Diese Effekte zeigen sich überwiegend in der ersten Mikrowelt (zstrich0). Für die nicht erkannten Strategien (strat00) kann man keine Korrelationen nachweisen, wohl aber für die drei anderen, von den Kindern verwendeten Strategien.

	strat10	strat20	strat30
eu-gesamt	-,195*	,204**	,274**
eu-Gruppentest	-,162*	,172*	,244**
eu-Einzeltest		,185*	,272**
eu-Merkmale..	-,195*	,209**	,286**
eu-Längenrel...			,192*
eu-Längenanz...			,205*
eu-Zählen	-,235**	,226**	,225**
es-gesamt		,185*	
es-Proportionalität		,164*	
su-gesamt	-,256**		,216**

Tab. 5.02: Strategien - Eingangstest: Korr.

Die guten Gesamtergebnisse der Eingangsuntersuchung korrelieren mit häufiger Nutzung der Strategien 2 (ab Vorgabezahl: r=0,204**) und 3 (direkt: r=0,274**). Aus dem Eingangstest zeigen wieder die Aufgabenbereiche 'Merkmale erkennen' und 'Zählen' schwache aber hoch signifikante Korrelationen. Diejenigen Kinder, die gut zählen können, wählen gerade nicht Strategie 1 (Zählstrategie ab Null: r= -0,235**) häufig, sondern eher Strategie 2 (ab Vorgabe: r=0,226**) oder Strategie 3 (direkt: r=0,225**).

Strategie 1 (ab Null) korreliert außerdem negativ (r= -0,256**) mit dem Abschlusstest. Diejenigen Kinder, die dagegen Strategie 2 gewählt haben, sind auch im Abschlusstest erfolgreicher (r=0,216**) und zwar besonderes beim Teiltest Zahlenraum (ZR: r=0,287**). Die Defizite der Zahlvorstellung bei schwächeren Kinder, die sich im Gebrauch von Strategie 1 statt Strategie 2 oder 3 manifestieren, sind relativ überdauernd und auch am Ende des Schuljahres noch nachzuweisen.

Wenn man die Ergebnisse des Eingangstests, der Einführungsstunde und des Abschlusstests kumuliert, also die Kinder betrachtet, die in der Summe aller drei Tests gut abgeschnitten haben, dann bestätigen sich die oben gemachten Aussagen:

n=162	strat10	strat20	strat30	Anzahl	richtig	maxd
Pkte.	-,189*	,229**	,251**	,204**	,267**	-,258**

Tab. 5.03: Strategien und kumulierte Tests - Korr.

Die erfolgreichen Kinder wählen selten Strategie 1 (Zählen ab Null) sondern operieren ab der Vorgabezahl (strat20) oder direkt (strat30). Sie bearbeiten viele Aufgaben, haben viele Aufgaben richtig und haben bei der Suche keine große Abweichung von der gesuchten Zahl (maxd).

Ähnliche Effekte zeigen sich bei der Abweichung in y-Richtung. Es scheint so, als ob sich die Kinder sehr starkt an der gezeichneten oder gedachten x-Achse orientieren.

	maxdy0	maxdy2
maxdy1	,271**	,511**
maxdy2	,267**	-

Tab. 5.04: Abweichung von der x-Achse nach Mikrowelten - Korr.

Die Abweichungen sind bei einzelnen Kindern in allen 3 Mikrowelten relativ stabil. Dass diese Kinder mit den großen Abweichungen gleichzeitig auch diejenigen sind, die in den mathematischen Leistungstests schlechter abschneiden zeigt die folgende Tabelle.

	maxdy0	maxdy1	maxdy2
Eingangsuntersuchung	-,219**	-,240**	-,260**
Abschlussuntersuchung	-,259**	-,416**	-,323**

Tab. 5.05: Strategien und kumulierte Tests - Korr.

Alle Kinder mit geringen Abweichungen von der x-Achse haben beim Eingangstest und sogar noch beim Abschlusstest signifikant die höheren Punktzahlen erreicht.

Auch bei den Strategien in zstrich1 zeigt sich ein Zusammenhang zur Abweichung von der x-Achse. Diejenigen Kinder, die Strategie 3 (direkt) häufig wählen, haben geringe Abweichungen (r= -0,460**), während bei den Kindern, die häufig Strategie 1 (ab Null) wählen, die Abweichungen groß sind (r=0,201**).

- *Kinder, die in den Mikrowelten häufig Strategie 3 wählen, haben auch beim mathematischen Eingangstest und beim Abschlusstest höhere Punktzahlen erreicht.*
- *Kinder, die beim Eingangstest im Bereich 'Zählen' und beim Abschlusstest erfolgreich sind, wählen gerade nicht Strategie 1 sondern Strategie 2 bzw. 3.*
- *Kinder, die bei den mathematischen Tests erfolgreich sind, arbeiten in den Mikrowelten erfolgreicher und genauer. Sie haben mehr richtige Lösungen und eine geringere Abweichung von der gesuchten Zahl.*

5.2.2 Einzelaspekte

Ähnliche Werte wie für die Strategien erhält man, wenn man die Anzahl richtiger Lösungen in den Computermikrowelten mit dem Eingangstest korreliert. Hier zeigen sich wieder nur für zstrich0 signifikante Werte, wieder in den Bereichen 'Merkmale erkennen' (r=0,210**) und 'Zählen' (r=0,211**).

Außerdem zeigt sich eine geringe, aber höchst signifikante Korrelation zum Teiltest 'Proportionalität' der Eingangsstunde (r=0,212 **).

Die in zstrich0 gemessene Durchschnittszeit bis zum ersten Klick (eklick_d) erweist sich auch im Zusammenhang mit den mathematischen Leistungstests als sehr aussagekräftige Variable, sowohl für die Eingangsuntersuchung, wie auch für den Abschlusstest.

n=176	eklick_d
Eingangsuntersuchung-gesamt	-,292**
eu-Gruppentest	-,230**
eu-Einzeltest	-,307**
eu-Merkmale..	-,283**
eu-Längenrel...	-,209**
eu-Längenanz...	-,106*
eu-Zählen	-,227**
Abschlusstest-gesamt	-,196**
MZ-(Mengen-Zahlen)	-,207(**)

Tab. 5.06: Zeit bis zum 1. Klick und EU / SU - Korr.

Kinder die lange brauchen um sich zu orientieren und den ersten Klick zu setzen haben in allen Bereichen der Eingangsuntersuchung wenig Punkte erzielt. Sie schneiden auch beim Abschlusstest schlechter ab.

In der Eingangsuntersuchung sind es vor allem Aufgaben mit vielen Merkmalen bzw. Objekten in unterschiedlichen Ausprägungen, die signifikante Korrelationen zu eklick_d in zstrich0 aufweisen:

n=176	eu08	eu09	eu12	eu18	eu27	eu32	eu34	eu35
eklick_d	-,225**	-,272**	-,281**	-,196**	-,245**	-,226**	-,212**	-,209**

Tab. 5.07: Zeit bis zum 1. Klick und Aufg. EU- Korr.

Alle Kinder, die wenig Zeit bis zum ersten Klick brauchen, haben diese Aufgaben erfolgreich bearbeitet. Von allen Aufgaben zum Zählen weist nur eu27 (Zähle rückwärts ab 17) eine höchst signifikante Korrelation auf.

In der Mikrowelt zstrich1 zeigen wieder einige der oben genannten Aufgaben signifikante Korrelationen zu den Strategien:

n=126	eu08	eu09	eu10	eu12	eu28
strat11	-,248**	-,243**	-,277**		
strat31				,248**	,240**

Tab. 5.08: Zstrich1 und Aufg. EU- Korr.

Wer Strategie 1 häufig wählt, hat die Aufgaben eu08 (Ordnung: Kästen mit Äpfeln) , eu09 (Ordnung: Zuckerstangen) und eu10 (Ordnung: Murmeln) nicht richtig bearbeitet. Dies sind alles Aufgaben, bei denen zum Herstellen der Ordnung mehrere Merkmale berücksichtigt werden müssen. Die Kinder die eu12 (Ordnung: Stapel mit Brotscheiben) und eu28 (Zählen bis 20) erfolgreich bearbeitet haben wählen in zstrich1 häufig Strategie 3 (direkt zur Zahl).

Diejenigen Kinder, die in der Eingangsuntersuchung Aufgabe eu25 (Lineal) erfolgreich bearbeitet haben, wählen in Mikrowelt zstrich3 signifikant häufiger Strategie 3 (r=0,458**; n= 60).

Auch die verschiedenen hier vorgestellten Einzelaspekte zeigen wieder, dass die frühzeitige Verfügbarkeit von mathematischem Grundwissen und von Strategien beim Eingangstest langfristige Auswirkungen über die gesamte Eingangsklasse und sogar noch in Klasse 2 hat.

- *In den Mikrowelten haben diejenigen Kinder viele richtige Lösungen, die in den Teilbereichen 'Zählen', 'Merkmale erkennen' und 'Proportionalität' der mathematischen Tests erfolgreich waren.*
- *Geringe Durchschnittszeiten bis zum ersten Klick in der ersten Mikrowelt gehen gleichzeitig einher mit hohen Punktzahlen in den mathematischen Tests. Diese Kinder können ihre mentalen Modelle und ihr Wissen schnell aktivieren.*
- *Kinder, die ihre mentalen Modelle schnell aktivieren können, bearbeiten auch Aufgaben mit vielen Merkmalen bzw. Objekten in unterschiedlichen Ausprägungen aus dem mathematischen Eingangstest erfolgreich.*
- *Kinder, die im mathematischen Eingangstest die Linealaufgabe gut bearbeitet haben, wählen in Mikrowelt zstrich3 häufiger die Direktstrategie.*

5.3 Geschlechtsspezifische Effekte

5.3.1 Darstellung der Daten

Die wenigen, in diesem Unterkapitel dargestellten geschlechtspezifischen Unterschiede sind nicht Ergebnis einer gezielten, systematischen Suche im vorliegenden Datenmaterial, sondern traten bei den bisher dargestellten Untersuchungen eher beiläufig zu Tage.

Ein Boxplot der Punkteverteilungen

- in der Eingangsuntersuchung (eu: Anfang Klasse 1),
- im Abschlusstest (su: Ende Klasse 1) und

- bei der Mathematiknote (Note: Ende Klasse 2)

zeigt nur minimale Unterschiede zwischen Jungen und Mädchen. Der Median liegt bei allen drei Untersuchungen für die Mädchen etwas unter dem der Jungen und auch die Verteilungen variieren, wenn man vom Abschlusstest absieht nur leicht.

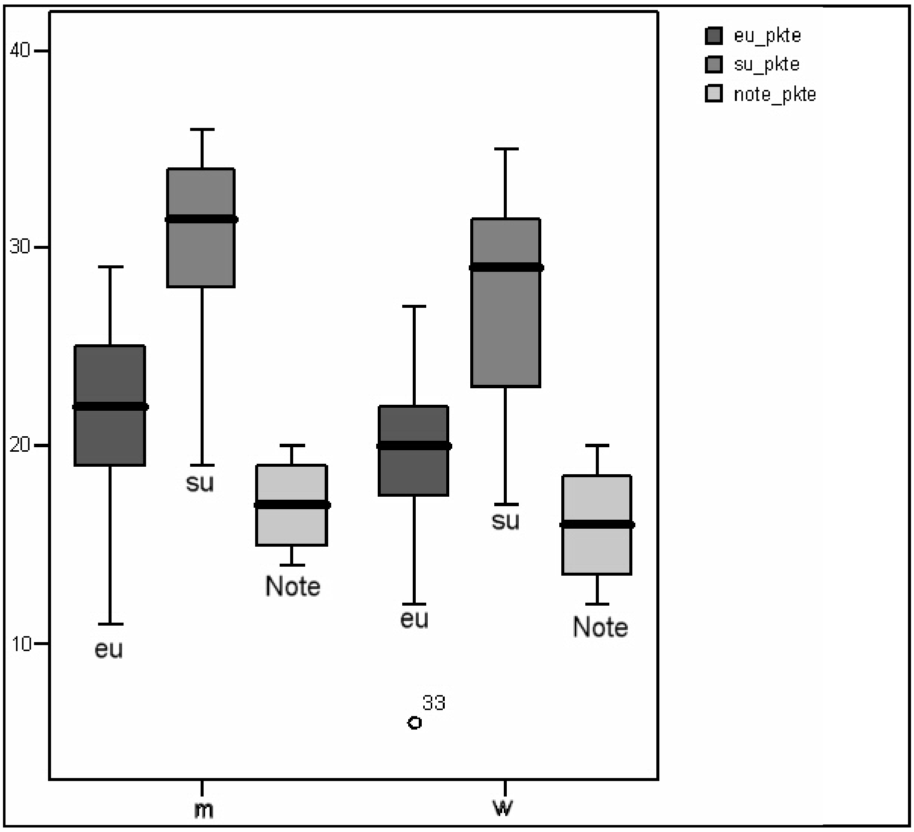


Abb. 5.01: Ergebnisse der Tests nach Geschlecht

Geschlechtsspezifische Unterschiede zeigen sich nicht generell und fallen meist auch nicht ins Auge, sondern werden in Einzelheiten und Nuancen in der Ausprägung der Variablen deutlich.

Kinder:	zstrich0	zstrich1	zstrich2
Anzahl(m)	94	73	39
Anzahl(w)	82	53	21
richtige Lösungen:			
Mittelwert (m)	13,0	17,2	19,6
Mittelwert (w)	10,2	14,6	20.5
Standardabweichung(m)	9,3	9,6	11,4
Standardabweichung(w)	7,1	9,7	9,8

Tab. 5.09: Anzahlen und Mittelwerte m/w - Strategien

Beim Arbeiten in den verschiedenen Mikrowelten nimmt die Anzahl der Kinder kontinuierlich ab. Diese Abnahme scheint bei den Mädchen aber weit stärker als bei den Jungen zu sein.

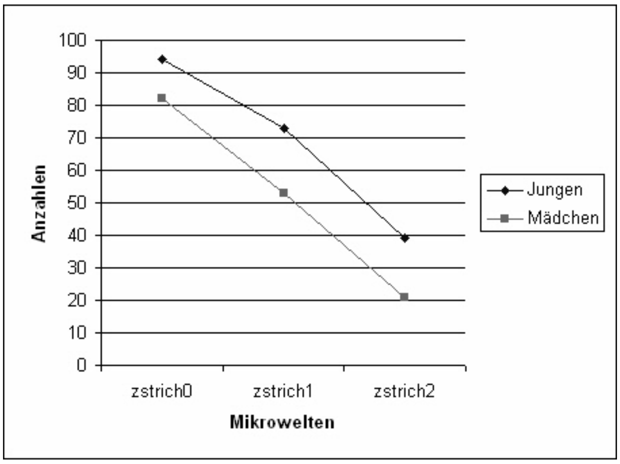


Abb. 5.02: Anzahl Jungen / Mädchen - Zeitreihe

Die Darstellung der Zeitreihe über die drei Mikrowelten macht aber deutlich, dass die Abnahme der Anzahlen bei Jungen und Mädchen nahezu parallel verläuft.

Wenn man die Mittelwerte (Tab 5.09) betrachtet, fällt auf, dass die Mädchen in den ersten beiden Mikrowelten etwas schlechter abschneiden aber in der letzten Mikrowelt plötzlich besser sind als die Jungen. Eventuell resultiert dies aus der starken Abnahme der Anzahlen bis zu Mikrowelt zstrich2 - es arbeiten am Ende nur noch die interessierten und guten Schülerinnen in der Computermikrowelt. Darauf deutet auch die, im Vergleich mit den Jungen geringere Standardabweichung für die Mädchen hin - sie sind insgesamt besser.

Den Wechsel der Strategiewahl zeigen die beiden folgenden Abbildungen:

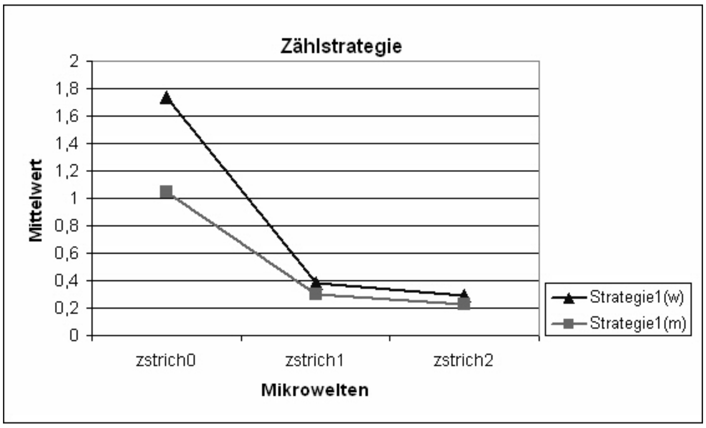


Abb. 5.03: Wahl Strategie 1 bei Jungen/Mädchen - Zeitreihe

Mädchen wählen in Mikrowelt zstrich0 im Mittel häufiger die sichere Standardstrategie 1, die schon in der Einführungsstunde vorgegeben wurde. In den folgenden Mikrowelten sind die Werte für Jungen und Mädchen vergleichbar. Die Wahl von Strategie 1 in Mikrowelt zstrich0 durch die Mädchen ist hoch signifikant (r=0,203**; n=176). In der ersten Mikrowelt zeigen sich außerdem noch weitere geschlechtsspezifische Korrelationen. Mädchen lösen weniger Aufgaben richtig (ri_z0: r= -0,156*; n=174), brauchen auch im Durchschnitt für die Bearbeitung der Aufgaben länger (dzeit_z0: r=0,206**; n=174). Ebenso ist die Durchschnittszeit bis zum ersten Klick für die Mädchen in zstrich0 signifikant größer (r=0,241**; n=176).

Bei den Strategien 2 und 3 sieht man jeweils eine gegenläufige Entwicklung.

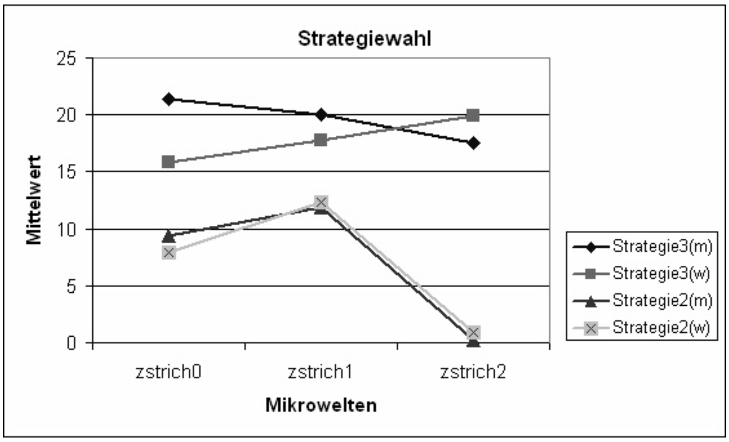


Abb. 5.04: Wahl Strategie 2/3 bei Jungen/Mädchen - Zeitreihe

In der Mikrowelt zstrich0 wählen Mädchen zunächst etwas häufiger Strategie 2 (ab Vorgabe) um dann in den anderen beiden Mikrowelten seltener als die Jungen diese Strategie anzuwenden. Bei Strategie 3 sieht man für alle drei Mikrowelten bei den Mädchen eine Zunahme, so dass sie diese Strategie am Ende sogar häufiger als die Jungen einsetzen. Dabei muss man allerdings berücksichtigen, dass Mikrowelt zstrich 3 nur noch halb so viele Mädchen wie Jungen bearbeiten (vgl. Abb. 5.02).

Auch bei den mathematischen Leistungstests finden sich einzelne geschlechtsspezifische Effekte. Schon bei der Eingangsuntersuchung lassen sich leichte, aber hoch signifikante Unterschiede feststellen:

- Mädchen benutzen eher selten LernCD's am Computer (r= -0,244**; n=190).
- Die Begriffe Monitor (r=-0,217**, n=190) und Maus (r=-0,233**; n=190) sind ihnen weniger geläufig.

- Beim Rückwärtszählen ab 17 (eu32) schneiden die Mädchen signifikant schlechter ab (r=-0,271**; n=190).

Wenn man die Populationen Mädchen und Jungen getrennt betrachtet, dann fällt auf, dass bei den Jungen besonders der Bereich 'Merkmale erkennen...' des Eingangstests mit vielen richtigen Lösungen in der Mikrowelt zstrich0 korreliert (r= 0,275**; n=93). Bei den Mädchen dagegen sind es die Bereiche 'Längenrelationen schätzen' (r= 0,300**; n=81) und 'Zählen' (R=0,323**; n=81). Dies deutet zumindest darauf hin, dass Jungen und Mädchen mit unterschiedlichen Grundstrategien arbeiten und eventuell sogar ihren mentalen Zahlenstrahl aus unterschiedlichen Basiskompetenzen aufbauen. Gestützt wird diese Vermutung auch durch entsprechende Korrelationen beim Gebrauch von Strategie 3 in Mikrowelt zstrich 0:

- Jungen: strat30 - Merkmale erkennen (r=0,301**; n=94);
- Mädchen: strat30 - Längenrelationen schätzen (r=0,315**; n=82) und strat30 - Zählen (r=0,289**; n=82).

Beim Abschlusstest am Ende von Klasse 1 schneiden die Mädchen insgesamt signifikant schlechter ab als die Jungen (r= -0,289**; n=186). Dieses zunächst bedenkliche Ergebnis entsteht aber offensichtlich durch die hohe negative Korrelation zwischen Geschlecht und dem ersten Subtest (MZ: r=-0,721**; n=190). Man muss dies wahrscheinlich so interpretieren, dass die Mädchen nicht so gut in den Test starten wie die Jungen. Eventuell gewöhnen sie sich einfach nicht so einfach und schnell an die Testsituation und 'verschlafen' dadurch die ersten, leichten Aufgaben.

5.3.2 Diskussion geschlechtsspezifischer Effekte

Allgemein kann man davon ausgehen, dass es zunächst keine geschlechtsspezifischen Unterschiede in der Ausstattung mit Fähigkeiten für den Mathematikunterricht gibt. Darauf weist auch GEARY[1994, 192ff.] in einer Zusammenschau vieler Gender-Untersuchungen hin: '... *there are... no gender differences in the preschool children's counting skills and conceptual understanding of counting, number and artihmetik... the results are robust across studies and across cultures.'* Auch gegen Ende der ersten Klasse zeigen sich in amerikanischen Untersuchungen noch keine Unterschiede: *'Thus at least for solving simply arithmetic problems, elementary school boys and girls do not appear to differ substantively in strategy choices'*[a.a.O., 194]. Gegen Ende der Grundschulzeit sind dann geschlechtsspezifische Unterschiede in Teilbereichen des Mathematikunterrichts zu beobachten (z.B. *'solving aritmetical and algebraic word problems'* und *'geometry and other spatially related mathematical areas such as measurement, ...'*[a.a.O., 198]). Auch v.ASTER [1996, 18] beschreibt diesen sich entwickelnden Unterschied und nennt zwei Thesen zur Begründung: einerseits eine pränatale Hemisphärenspezialisierung im Gehirn sowie andererseits geschlechtsrollenspezifische Sozialisationsprozesse, die dazu führen, dass sich Mädchen weniger für Mathematik interessieren und weniger damit beschäftigen. V. ASTER [1996, 17] beschreibt dann sehr anschaulich die sich daraus entwickelnden unterschiedlichen Strategien beim Problemlösen:

- Mädchen beginnen mit einer Analyse des Problems, strukturieren es und versuchen, einen begrifflich konzeptuellen Rahmen zu bauen, der das Vorwissen mit einschließt. Sie zeigen eine eher 'begriffliche' Vorgehensweise, die aber mehr Zeit benötigt.
- Jungen dagegen beginnen schnell mit einer ersten Lösung, noch bevor sie ihre Ideen vollständig strukturiert haben. Sie finden die vollständige Lösung durch Analyse und Modifizierung von Teillösungen. Sie zeigen eine eher 'sequentielle' experimentelle Vorgehensweise.

Die wenigen geschlechtsspezifischen Ergebnisse in den hier untersuchten Klassen scheinen diese Aussagen zu bestätigen:

> Mädchen starten in Mikrowelt zstrich0 zunächst eher mit der 'primitiven' Zählstrategie 1 (Zählen ab Null). In den folgenden beiden Mikrowelten bauen sie ihr Konzept (mentaler Zahlenstrahl) aus und sind dann in der letzten Mikrowelt mit ihrer Direktstrategie erfolgreicher als die Jungen. Mädchen brauchen aber insgesamt länger und auch, um den ersten Klick zu setzen, mehr Zeit. Diese, im Vergleich mit den Jungen längere Zeit, brauchen sie nach v.ASTER [a.a.O.] um jeweils ihren konzeptuellen Rahmen aufzubauen. Dieser Faktor Zeit scheint auch beim Abschlusstest im Subtest MZ eine Rolle gespielt zu haben.

5.4 Gesamtdiskussion der Forschungsfragen

In diesem abschließenden Teil der Arbeit wird versucht, die in den vorhergehenden Kapiteln der Arbeit dargestellten Ergebnisse zusammenzufassen und ein Gesamtbild zu entwerfen. Dabei ist das vorrangige Ziel nicht, ein möglichst vollständiges und umfassendes Bild zu zeigen, sondern Teilaspekte und Zusammenhänge darzustellen und zu diskutieren, sowie die noch vorhandenen Lücken und Defizite zu benennen und dadurch weitere Forschungsansätze in den beiden Teilbereichen 'Zahlvorstellung und mentaler Zahlenstrahl' sowie der 'mikroweltbasierten, computerunterstützten, mathematikdidaktischen Forschung' zu initiieren.

In den nun folgenden Unterkapiteln wird auf der Grundlage der erhobenen und ausgewerteten Daten zunächst versucht, Antworten auf die, vor Beginn der Untersuchung gestellten Forschungsfragen zu finden.

5.4.1 Selbständiges Arbeiten in Mikrowelten (I1)

Die Frage, ob Kinder in einer ersten Grundschulklasse in LOGO-Mikrowelten selbständig arbeiten können, kann man mit Einschränkungen bejahen.

Von den meisten Kindern wurde die Igelmetapher aus den Einführungsstunden übernommen und bei der Arbeit in den Computermikrowelten genutzt. Die für das Längenschätzen am Zahlenstrahl grundlegende Idee der Proportionalität, welche eine Koordination von Schrittzahl, Schrittlänge und Gesamtstrecke voraussetzt, wurde von den Kindern nur in Ansätzen zusammen mit der Igelmetapher übernommen. Trotzdem konnten die meisten Kinder selbständig in den verschiedenen Mikrowelten arbeiten. Bei diesen Konstruktionen der Kinder wurden dann aussagekräftige Daten in Form von informatischen Protokollen erzeugt.

In den gesammelten Daten zeigen sich allerdings große individuelle Unterschiede, nicht nur bei der mentalen Zahlvorstellung sondern auch bei den Quantitäten und bei motivationalen Aspekten. Es gab Kinder, die in den Freiarbeitsphasen nur eine oder zwei Mikrowelten bearbeitet haben, während andere Kinder einzelne Mikrowelten sogar mehrfach bearbeiteten. Einzelne Kinder haben in einer Sitzung 100 Aufgaben bearbeitet, andere gerade mal fünfzehn oder zwanzig Aufgaben. Daraus kann man schließen, dass Computermikrowelten nicht alle Kinder ansprechen. Die Mikrowelten müssen in Freiarbeitsphasen mit anderen Lernmaterialien und mit Spielen konkurrieren, die den Kindern in der Grundschule ebenso zum Arbeiten und Üben zur Verfügung stehen. Positiv interpretiert kann man aber feststellen, dass für die Kinder in der Eingangsklasse Computer nicht etwas vollständig Neues sind. Wie die Erhebung im Eingangstest zeigt, kennen die meisten Kinder Computer, Peripheriegeräte und deren Funktion. Der Computer als Arbeitsmittel im Mathematikunterricht der Grundschule ist also für die Kinder ganz normal. Computer sind für sie ein Arbeitsmittel unter anderen. Allerdings müssten die Lehrkräfte den didaktischen Ort des Computereinsatzes bestimmen. Nur als Arbeitsmittel zum Üben im offenen Unterricht und in Freiarbeitsphasen eingesetzt, werden die Möglichkeiten, die dieses neue Medium bietet, sicher nicht voll ausgenutzt. Vor allem der Einsatz des Computers als Visualisierungsmedium und Forschungs- oder Diagnoseinstrument, um individuelle Lerndaten über einzelne Schüler zu sammeln und individuelles Lernverhalten festzustellen, müsste in Zukunft weiter ausgebaut werden. Dazu sind allerdings auf der Seite der Lehrkräfte Kompetenzen im Bereich der Diagnosemethoden und auch Kompetenzen, die über eine einfache Programmbedienung hinausgehen, Voraussetzung.

5.4.2 Mikrowelten und individuelle Lerndaten (I2)

Im vorigen Absatz wurde bereits dargestellt, dass Kinder selbständig in den Mikrowelten arbeiten können und wie dabei Lerndaten gesammelt werden. Diese Lerndaten können dann sowohl für alle, als auch für bestimmte Gruppen von Kindern ausgewertet werden. Die Mikrowelten zusammen mit der informatischen Protokollierung bieten alle Evaluationsmöglichkeiten von rein quantitativen Auswertungen über qualitative Auswertungsmöglichkeiten bis hin zur Auswertung individueller Daten und der Verfolgung von Entwicklungsverhalten einzelner Kinder im Zusammenhang mit den Visualisierungsmöglichkeiten des LOGO-Systems, wie in Kapitel 4 dargestellt.

Die rein quantitative Auswertung der Daten aller Kinder zeigt schon einzelne Aspekte qualitativer Art. Diejenigen Kinder, die viele Aufgaben richtig bearbeiten, tun dies in allen drei Mikrowelten. Diese Kinder sind gleichzeitig auch diejenigen, die in den mathematischen Leistungstests gut abschnitten. Die Computermikrowelten scheinen also eher leistungsstarke Kinder anzusprechen und diese Kinder können dann auch selbständig darin arbeiten. Leistungsschwächere Kinder sind weniger motiviert, bearbeiten weniger Aufgaben und bearbeiten diese Aufgaben dann auch eher falsch. Die Mikrowelten in der vorliegenden Form scheinen für diese Kinder weniger für eine Förderung geeignet.

Weiter zeigt sich, dass die Kinder, die in den Mikrowelten ihre Lösungen schnell finden, dabei viele richtige Lösungen konstruieren und auch viele Aufgaben bearbeiten. Diese erfolgreichen Kinder üben im Vergleich mit den weniger erfolgreichen Kindern mehr, sie profitieren von den Mikrowelten stärker. Diese Problematik der schwächeren Schüler zeigt sich auch daran, dass die Auswahl nicht erkannter Strategien beim Durcharbeiten der Mikrowelten bei dieser Gruppe, der nach dem Leistungstest schwächeren Kinder, signifikant ist. Diese Kinder wählen keine der automatisch vom

Computerprogramm erkannten Strategien (1, 2 oder 3), bzw. arbeiten so, dass keine Strategie sichtbar wird.

Problematisch zu beurteilen sind eher die schwächeren Schüler, wie auch die Beispiele der Einzelfallanalyse belegen. Das Suchen ohne Strategie bei diesen Kindern deutet auf ein fehlendes oder fehlerhaftes mentales Modell hin. Auch die Pausen während der Suche, welche der Orientierung am Zahlenstrahl, bzw. der Aktivierung des mentalen Modells dienen, findet man eher bei leistungsschwachen Kindern. Diese Kinder brauchen viele Mausklicks, um eine Lösung zu finden. Ihre Bearbeitungen zeichnen sich durch eher zielloses Herumsuchen aus. Andererseits sind diese Protokolle aber aussagekräftiger als die sehr kurzen Protokolle der Kinder, welche die Lösung sofort finden.

Trotzdem zeigt die Auswertung über alle drei Mikrowelten, dass im Durchschnitt alle Kinder beim Bearbeiten der Aufgaben im Laufe des Schuljahres immer häufiger Direktstrategie 3 wählen. Die Einzelfallanalysen zeigen hier aber ein differenzierteres Bild. Leistungsstarke Kinder gehen relativ schnell zu Direktstrategien über, während sich die leistungsschwächeren nur schwer von Zählstrategien lösen und sehr langsam zu Direktstrategien übergehen. Der Grund hierfür scheint in Defiziten bei verschiedenen mathematischen Grundfähigkeiten zu liegen, die in den folgenden Unterkapiteln herausgearbeitet werden sollen. Die Computermikrowelten können individuelle Lerndaten sammeln. Es gilt jedoch zu klären, welche mathematischen und mentalen Fähigkeiten für gute Zahlvorstellung und ein arbeitsfähiges mentales Modell grundlegend sind, damit dann in den Mikrowelten auch die richtigen aussagekräftigen Daten gesammelt werden.

5.4.3 Merkmale, Relationen und Zahlvorstellung (M1)

Bei dem Teiltest 'Proportionalität' der Einführungsstunde sind die Kinder erfolgreich, die auch beim mathematischen Eingangstest gute Ergebnisse in den Aufgabengruppen 'Zählen', 'Längen vs. Anzahlen schätzen' und 'Merkmale erkennen' zeigen. Die Proportionalität, also das Erkennen der richtigen Schrittlänge bei vorgegebener Teilstrecke und vorgegebener Zahl wird anscheinend von den Kindern gut erkannt, die auch verschiedene Merkmale einer Situation gut erkennen und kombinieren können. Ebenso haben in den drei Mikrowelten diejenigen Kinder viele richtige Lösungen, die beim mathematischen Eingangstest in den Teilbereichen 'Zählen', 'Merkmale erkennen' und 'Proportionalität' erfolgreich waren. Der Aufgabenbereich 'Merkmale erkennen' des mathematischen Eingangstests bildet sicher Grundfähigkeiten ab, welche die Kinder brauchen, um ein brauchbares mentales Modell des Zahlstrahls aufzubauen.

DEHAENE beschreibt sein zentrales Modul der analogen Zahlrepräsentation ebenfalls als mentale Repräsentation von Zahlgrößen, in denen Zahlwissen über Relationen gespeichert ist. Diese Relationen müssen aktiviert werden, damit die mentale Repräsentation als mentaler Zahlenstrahl arbeitsfähig wird. Gerade bei Direktstrategien in den Mikrowelten werden alle möglichen Relationen des vorgegebenen Kontextes beachtet und mit dem mentalen Zahlenstrahl koordiniert. Als Folge entstehen in den Mikrowelten relativ genaue Konstruktionen mit geringen Abweichungen von der gesuchten Zahl. Dies zeigt auch die Bearbeitung der Linealaufgabe. Kinder, die im mathematischen Eingangstest die Linealaufgabe genau bearbeitet haben, also viele Einzelmerkmale des Lineals richtig konstruieren können, wählen in Mikrowelt zstrich3 häufiger die Direktstrategie.

Diejenigen Kinder, die in den Mikrowelten viele Aufgaben richtig lösen und dabei wenig Zeit brauchen, die also ihre mentalen Modelle schnell aktivieren können, bearbeiten auch Einzelaufgaben mit vielen Merkmalen bzw. Objekten in unterschiedlichen Ausprägungen im mathematischen Eingangstest erfolgreicher. Die Fähigkeit, verschiedene Merkmale erkennen und unterscheiden zu können, Objekte aufeinander zu beziehen und voneinander zu unterscheiden scheint eine grundlegende Voraussetzung für gute mentale Zahlvorstellung zu sein. Wenn diese relationalen Grundfähigkeiten vorhanden sind, dann können damit arbeitsfähige mentale Modelle der Zahlgrößen konstruiert werden.

5.4.4 Längen schätzen und Zahlvorstellung (M2)

In Mikrowelt zstrich0, in der die Vorgabezahl jeweils durch eine Länge dargestellt wird, lassen sich im Laufe der Bearbeitung Lerneffekte nachweisen. Die Anzahl richtiger Lösungen nimmt bei allen Strategien zu und falsche Lösungen werden seltener. Die Kinder lernen während der Bearbeitung die jeweils gleich skalierten Längen immer besser abzuschätzen und finden so die gesuchte Zahl. Diese angeborene Fähigkeit zum Schätzen wird auch von DEHAENE dargestellt, der Experimente zitiert, wo bei Anzahlschätzungen die Vorgabe von Orientierungsanzahlen die Schätzergebnisse stark verbessert. Beim 'Längen schätzen' in Mikrowelt zstrich0 scheinen ähnliche Effekte aufzutreten. Jede richtig geschätzte, gefundene Zahl gibt dem Kind eine positive Rückmeldung und gleichzeitig Orientierung für die nächste Schätzung.

In den Mikrowelten lassen sich aber auch die gegenteiligen Effekte nachweisen. Kinder, die bei ihren Bearbeitungen eine große durchschnittliche Abweichung von der gesuchten Zahl zeigen, wählen eher Strategie 1 und konstruieren damit eher falsche Lösungen. Bei Aufgaben mit großer gesuchter Zahl wird in allen drei Mikrowelten die Bearbeitung mit ungenauem ersten Klick, d.h. mit großem Abstand zur gesuchten Zahl begonnen. In Aufgaben, bei denen der Abstand zwischen gesuchter Zahl und Vorgabezahl groß ist, wird der erste Klick in der Regel zu kurz gesetzt. Die Kinder verschätzen sich weil sie unter Beachtung der beiden Zahlen diese längere Strecke mental verkürzen (vgl. 1.3.3), statt den richtigen Ort der gesuchten Zahl über Relationen und operationale Zusammenhänge zu rekonstruieren. Dies alles lässt darauf schließen, dass 'Längen schätzen' keine angeborene Fähigkeit ist, sondern, wie z.B. das Zählen und andere mathematische Grundfertigkeiten, erlernt und geübt werden muss.

Die, bei den mathematischen Tests erfolgreichen Kinder, arbeiten in den Mikrowelten genauer. Sie haben mehr richtige Lösungen und eine geringere Abweichung von der gesuchten Zahl. Kinder, die Zählstrategien ab Null nutzen, machen ihre Zählschritte meist zu klein, da sie sich nicht an der vorgegebenen Gesamtlänge orientieren. Die Zählschritte haben dann keine relative sondern eine absolute Länge. Diese Kinder können keine Relationen zwischen Vorgabezahl, Anzahl und vorgegebener Strecke herstellen. Bei Direktstrategien dagegen werden alle möglichen Relationen und Längenverhältnisse des vorgegeben Kontextes beachtet und daraus wird ein genauer mentaler Zahlenstrahl konstruiert. Die Zahlen werden als Relationszahlen gebraucht.

5.4.5 Zählfertigkeiten und Zahlvorstellung (M3)

Neben den Aufgabenbereichen ‘Merkmale erkennen’ und ‘Längen schätzen’ des mathematischen Eingangstests ist auch der Bereich ‘Zählen’ einer der Grundbereiche in dem Kinder Fähigkeiten für eine gute mentale Zahlvorstellung erwerben. Gute Fertigkeiten im Teiltest 'Zählen' der Eingangsuntersuchung sind eine Grundlage für eine zukünftige positive Entwicklung. Sogar noch am Ende von Klasse 2 sind die Kinder erfolgreich, die beim Teiltest 'Zählen' der Eingangsuntersuchung erfolgreich waren. Besonders Kinder mit weitergehenden Zählfertigkeiten (bis 14 in Zweierschritten, Rückwärtszählen ab 17) sind auch beim Abschlusstest erfolgreich.

Zählen bildet eine wichtige Grundlage für weitergehende mathematische Fähigkeiten und auch für den Aufbau eines funktionsfähigen mentalen Zahlenstrahls. Dies zeigt sich in vielen Einzelergebnissen der vorliegenden Arbeit, wo gerade die Kinder, die gute Zählfertigkeiten haben, erfolgreich sind. Diese Kinder, die beim Eingangstest im Bereich 'Zählen' und außerdem beim Abschlusstest erfolgreich sind, wählen in den Mikrowelten gerade nicht die Zählstrategie 1, sondern eher Strategie 2 oder 3. Bei den Kindern, die Strategie 1 wählen, lässt sich in den Mikrowelten kein Zusammenhang mit richtigen Lösungen nachweisen, sehr wohl aber bei den Strategien 2 und 3. Kinder mit guten Ergebnissen im Teiltest 'Zählen' sind auch erfolgreich beim Teiltest 'Proportionalität' der Einführungsstunde. Diejenigen Kinder, die das Linealbild aus dem Gedächtnis korrekt beschriften können, haben auch die Zählaufgaben erfolgreich bearbeitet. Damit zeigt sich, das gute Zählfertigkeiten für unterschiedlichste Bereiche mathematischer Aktivitäten grundlegend sind.

5.4.6 Individuelle Entwicklung der mentalen Zahlvorstellung (M4)

Die informatischen Protokolle ermöglichen ein breites Spektrum an möglichen Analysen. Möglich sind sowohl quantitative wie auch qualitative Analysen bis hin zu individuellen Einzelfallanalysen.

Die Bearbeitungen einzelner Kinder entwickeln sich, ihre Bearbeitungsprozesse und die Arbeitsergebnisse werden immer genauer. Lerneffekte während der Bearbeitung zeigen sich in genaueren, verkürzten Strategien und weniger Klicks bis zur Lösung. Im Idealfall gehen die Kinder zu Direktstrategien über. Kinder, die häufig die Direktstrategie 3 wählen, bearbeiten in allen Mikrowelten eine größere Anzahl Aufgaben und sind dabei auch erfolgreicher. Die Frage ist allerdings, wie sich im Laufe der Zeit diese Direktstrategie, also das Operieren mit einem vollständig funktionsfähigen mentalen Zahlenstrahl ausbildet.

Bei vielen Kindern kann man beim Übergang von Mikrowelt zstrich1 zu zstrich2 einen Wechsel von Strategie 2 (ab Vorgabe) zur Direktstrategie 3 beobachten. Vermutlich wirkt sich die in Mikrowelt zstrich2 angebotene Orientierung an 10 positiv auf die häufige Auswahl von Direktstrategien aus. Die Beispiele für Strategie 2 in Mikrowelt zstrich1 zeigen, dass die Orientierung an der Zehner- bzw. Zehner-Fünferstruktur erfolgreiche Konstruktionen unterstützen. Bei fehlender sichtbarer Struktur (zstrich2) muss die Zehner-Fünferstruktur von den Kindern mental konstruiert werden. Diese mentalen Anker können dann für die Konstruktion der gesuchten Zahl genutzt werden.

Neben der Hilfe durch Vorstrukturierung der Mikrowelt ist auch der Faktor Zeit bestimmend für die Entwicklung eines guten mentalen Zahlenstrahls. Kinder, die häufig Strategie 3 wählen, haben in allen 3 Mikrowelten sehr kurze durchschnittliche Bearbeitungszeiten pro Aufgabe. Andererseits wählen die Kinder, die bis zum ersten Klick viel Zeit brauchen, nicht Strategie 3, bearbeiten nicht viele Aufgaben, konstruieren eher selten richtige Lösungen. Aufgaben, bei denen die Durchschnittszeit bis zum ersten Klick groß ist, werden eher falsch gelöst. Geringe Durchschnittszeiten bis zum ersten Klick in der ersten Mikrowelt gehen einher mit hohen Punktzahlen in den mathematischen Tests. Diese Kinder können ihre mentalen Modelle und ihr Wissen schnell aktivieren. Pausen während der Suche dienen der Orientierung am Zahlenstrahl, bzw. der Aktivierung des mentalen Modells und sind eher bei leistungsschwächeren Kindern zu finden. Leistungsstarke Kinder gehen relativ schnell zu Direktstrategien über. Sie können ihren mentalen Zahlenstrahl gut in die Mikrowelt integrieren, finden die gesuchte Zahl schnell und brauchen wenig Mausklicks. Damit wird auch das interne Bild, der mentale Zahlenstrahl, sehr zeitnah verstärkt und immer genauer und funktionaler. Dies führt dazu, dass leistungsstarke Kinder in ihrer Strategiewahl sehr flexibel sind. Sie erkennen untaugliche Strategien und suchen je nach Anforderung vorwärts oder rückwärts.

Leistungsschwächere Kinder, die kein gutes mentales Modell des Zahlenstrahls haben, machen eher Strategiewechsel während der Bearbeitung. Die gewählten Strategien sind meist nicht optimal. Diese Kinder suchen häufig ohne Strategie bzw. halten an nicht zielführenden Strategien fest. Sie sind nicht sehr flexibel in ihrer Strategiewahl. Suchen ohne Strategie deutet auf ein fehlendes oder fehlerhaftes mentales Modell hin. Leistungsschwächere Kinder brauchen viele Mausklicks, um eine Lösung zu finden. Ihre Bearbeitungen zeichnen sich durch eher zielloses Herumsuchen aus. Bei leistungsschwächeren Kindern bilden sich Direktstrategien nur langsam aus, da zwischen der Aufgabenstellung und dem möglicherweise erfolgreichen Abschluss der Bearbeitung zu viel Zeit vergeht, als dass sich mentale Strukturen ausbilden könnten. Der Kontext der Aufgabe geht verloren, der mentale Zahlenstrahl wird nicht verbessert. Dasselbe gilt für die Zahlensuche durch Klicken. Auch dies ist eine Oberflächenstrategie, die nicht zu vertieften Einsichten über die Zusammenhänge zwischen den Zahlen in der bearbeiteten Mikrowelt führt und deshalb den individuellen mentalen Zahlenstrahl nicht weiterentwickeln kann.

Besonders deutlich zeigen die Einzelfallanalysen (siehe Kapitel 4.4), dass es sich beim mentalen Zahlenstrahl um eine individuelle Konstruktion handelt. Trotz individueller Ausprägung werden in den Bearbeitungen verschiedener Kinder bestimmte Muster sichtbar, so dass sich die mentalen Konstruktionen damit in Klassen einteilen lassen. Diese Klasseneinteilung eröffnet dann die Möglichkeit für eine automatische Auswertung und Strategieerkennung.

Bei allen vier Kindern der Einzelfallanalysen lassen sich über die Zeit Lerneffekte beobachten. Die Suche nach der Zahl wird immer exakter und die Schüler benötigen immer weniger Klicks um die Zahl zu finden. Der für die Konstruktionen in den Mikrowelten genutzte mentale Zahlenstrahl wird immer genauer, d.h beziehungsreicher und flexibler. Die Orientierung an einer Zahl und in eine Richtung, wie bei den Zählstrategien, wird abgelöst durch die Möglichkeit sich frei in beide Richtungen zu bewegen und dabei gleichzeitig die Relationen Null - aktueller Ort - Vorgabezahl immer wieder an die Mausbewegung anzupassen.

Trotzdem sieht man zwischen den beiden Kindern des unteren Leistungsviertels und denen des oberen Viertels deutliche Unterschiede.

- Festhalten an nicht zielführenden Strategien,
- Suche ohne Strategien,
- viele Mausklicks bis zur Lösung, d.h. eher reines, zielloses Herumsuchen
- nur langsame Ausprägung von Direktstrategien usw.,

sind eher bei den Kindern des unteren Viertels zu beobachten. Vor allem bei den Kindern, die ihre Bearbeitung abbrechen, hat man den Eindruck, dass sie nur Teilaspekte der Aufgabe beachten. So wird z.B. beim Suchen durch Zählen nur Wissen über die Schrittzahl genutzt und die Proportionalität nicht beachten. Sie sind dann auch nicht fähig, falls sie nicht zum Erfolg kommen, weitere Aspekte in ihre Überlegungen mit einzubeziehen, sondern versuchen immer wieder mit derselben falschen Strategie eine Lösung zu konstruieren.

Kinder des oberen Viertels zeichnen sich dadurch aus, dass sie

- wenig Mausklicks zur Lösung brauchen, d.h. die gesuchte Zahl schnell ansteuern
- untaugliche Strategien erkennen und dann zu einer besseren Strategie wechseln,
- flexibel, je nach Anforderung vorwärts oder rückwärts suchen

- und relativ schnell zu Direktstrategien übergehen, d.h. ihren mentalen Zahlenstrahl gut explizieren können.

Die Einzelfallanalysen zeigen aber auch, dass die informatischen Protokolle nur ein Teil einer umfassenderen Analyse sein können. Sie geben zwar erste Hinweise, um Aussagen über den Lernstand einzelner Kinder machen zu können, die Protokolle müssten allerdings durch Interviews und gezielte Beobachtungen der Kinder während der Arbeit in den Mikrowelten und ebenfalls durch mathematische Leistungstests bzw. andere standardisierte Tests ergänzt werden. Informatische Protokolle sind noch nicht ausreichend für eine Diagnose des Lernverhaltens, könnten aber durch medial andere Protokolle gestützt werden.

5.5 Folgerungen für den Mathematikunterricht

Die Daten aus den diversen Untersuchungen und den Bearbeitungsprotokollen zeigen eine Fülle von Einzelergebnissen, es entsteht ein noch lückenhaftes Gesamtbild das aber schon Grundlage für weitere Forschungen oder für Ratschläge, den Mathematikunterricht betreffend, sein könnte. Wie die verschiedenen mathematischen Leistungstests zeigen, sind für den mentalen Zahlenstrahl vor allem die Bereiche ‘Zählen’, ‘Merkmale erkennen’ und ‘Längen vs. Anzahlen schätzen’ grundlegend. Für das Erkennen der Proportionalität, also der Schrittlänge im Verhältnis der Schritte von Null bis zur Vorgabezahl, sind dieselben Faktoren bestimmend.

Der wichtigste Bereich, auch mit Bezug auf die längerfristigen Entwicklung in den ersten beiden Schuljahren scheint der Bereich ‘Zählen’ zu sein. Wer schon zu Beginn der Schulzeit gut zählen kann, hat damit eine Basis für eine umfassende positive Entwicklung beim Mathematiklernen. Diejenigen Kinder, die gut zählen können, haben auch eine gute mentale Zahlvorstellung. Sie wählen in den Computermikrowelten eher fortgeschrittene Strategien oder Direktstrategien. Diese Ergebnisse lassen auch den Schluss zu, dass die Ablösung vom Zählen und zählenden Rechnen im Mathematikunterricht dann funktioniert, wenn man gut zählen kann. Daraus muss man folgern, dass die Kinder im mathematischen Anfangsunterricht oder schon in der Vorschule das Zählen lernen und üben sollten. Dann kann im Laufe der ersten beiden Schuljahre auf dieser Grundlage die Ablösung vom Zählen hin zum Rechnen vollzogen werden. Die Ablösung vom zählenden Rechnen erreicht man dadurch, dass man Kinder Zählfertigkeiten und -strategien lehrt und nicht dadurch, dass man die Kinder zwingt, Zählen zu vermeiden.

Der Erfolg bei allen durchgeführten mathematischen Tests korreliert positiv mit der Wahl der Direktstrategie, vielen richtig gelösten Aufgaben und geringen Abweichungen bei der Suche der Zahl. Diese Kinder haben einen sehr genauen mentalen Zahlenstrahl, den sie schnell aktivieren und explizieren können. Grundlegend hierfür ist auch eine gutes Konzept der Proportionalität. Es scheint so, als ob für die Entwicklung des mentalen Zahlenstrahls besonders zwei Konzepte integriert werden müssen, nämlich Zählkompetenzen und Proportionalität.

Zählkompetenzen beinhalten zunächst die grundlegende Vorstellung des Vorwärts- und Rückwärtszählens unterstützt durch die Metaphern des Vorwärts- und Rückwärtsgehens. Dabei wird ab Null oder ab einer Vorgabezahl, in Einerschritten oder größeren Schritten vorwärts bzw. rückwärts gezählt. Dadurch wird Wissen über die Zahlen im Kontext aufgebaut und die Kinder werden zu großer Beweglichkeit am mentalen Zahlenstrahl befähigt.

Für die Anwendung des mentalen Zahlenstrahls muss dann noch das Konzept der Proportionalität dazukommen. Über Längenrelationen werden operative Beziehungen zwischen Zahlen aufgebaut. Das beginnt mit der grundlegenden Vorstellung, dass eine bestimmte Zahl von Schritten gleicher Länge die Gesamtstrecke von Null bis zur gesuchten Zahl ergibt und dass umgekehrt die Schrittlänge sich aus der Anzahl der Schritte und der Gesamtstrecke ergibt. Später kommen dann noch Vorstellungen des Verdoppelns, Halbierens, bzw. Vervielfachens und Aufteilens dazu. Auch der Umgang mit dem Lineal, bzw. eine gute Linealvorstellung scheint die Ausbildung dieser Kompetenz zu fördern.

Die Variable Zeit (Zeit pro Aufgabe, Zeit bis zum ersten Klick, Pausen zwischen Klicks, ...) scheint der entscheidende Faktor zu sein, der dann die weitere Entwicklung beeinflusst. Direktstrategien brauchen wenig Zeit, so dass dadurch ein direkter Zusammenhang zwischen Aufgabenstellung und richtiger Lösung erzeugt und so die Flexibilität des mentalen Zahlenstrahls weiter erhöht wird. Minimale, primitive Zählstrategien dagegen dauern zu lange. Deshalb macht man damit keine Fortschritte und der weitere Ausbau des mentalen Zahlenstrahls geht überhaupt nicht oder nur sehr langsam vorwärts. Ein schneller Ausbau geht nur mit Direktstrategien, die operationale Zusammenhänge abbilden. Bei rudimentären Zählstrategien geht aufgrund der langen Dauer und Ungenauigkeit des Zählvorgangs bis zur Lösung der Kontext verloren. Das Kind findet eventuell die gesuchte Zahl, es macht aber keinen Lernfortschritt, da die Aufgabenstellung und andere Zusammenhänge während der langen Bearbeitung vergessen wurden.

Diese vorher gemachten generellen Aussagen werden durch die Einzelfallanalysen ergänzt, die zeigen, dass der Erwerb des mentalen Zahlenstrahls eine individuelle Konstruktion ist. Hier zeigen sich große individuelle Unterschiede und individuelle Ausprägungen der diversen Strategiekategorien, auf die entsprechend methodisch-didaktisch individuell vom Lehrer reagiert werden müsste.

Der Aufbau von Vorstellungen über Zahlengrößen kann nicht nur durch genaues Auszählen von Mengen geleistet werden, das im tradiditonellen Anfangsunterricht immer noch die Hauptaktivität ist. Es müssen genauso Schätzübungen, Übungen mit Längen, motorische Übungen an realen Zahlenstrahlen sowie Zählübungen gemacht werden. Damit schafft man Grundlagen aus denen sich dann eine gute mentale Zahlvorstellung entwickeln kann. Damit diese Entwicklung nicht zufällig verläuft, muss man zusätzlich noch fordern, dass in individualisierten Unterrichtsphasen der aktuelle Entwicklungstand der einzelnen Kinder ständig überprüft wird. Man muss versuchen, vom altershomogenen Klassenunterricht wegzukommen, hin zur Individualisierung. Hier könnten Mikrowelten als individuelle Lernumgebung und mit entsprechender Visualisierung als Analyseinstrument und Evaluationstool für die Lehrkräfte zur Diagnose von Lernverhalten eingesetzt werden.

Ein weiterer wichtiger Punkt ist die Überwindung der Stufentheorie nach Piaget, wonach Mathematiklernen erst möglich wird, wenn Kinder Invarianz erreicht haben. Die Arbeiten von WYNN, FUSON, GEARY, BAROODY u.a. zeigen, dass bereits im Alter von vier Jahren erste grundlegende mathematische Aktivitäten ablaufen, die für die weitere Entwicklung bestimmend sind. Besonders in den Bereich Zählen, Merkmale erkennen, Relationen und Handlungen mit Längen könnte man schon im Kindergarten und Vorschulbereich vielfältige Aktivitäten anbieten, die bei den Kindern erste mathematische Grundlagen schaffen, auf denen dann der schulische Mathematikunterricht aufbauen kann. In diesem Bereich der vorschulischen Mathematik müssen in Deutschland sicher auch die Forschungsaktivitäten intensiviert werden, da es, wenn man die Situation mit anderen Ländern wie z.B USA, England, Schweden, Finnland, usw. vergleicht, hier einen riesiges Defizit gibt. In Baden-Württemberg soll erstmals ab dem Kindergartenjahr 2005/06 ein sogenannter Orientierungsplan erprobt werden. In Bayern und anderen Bundesländern laufen momentan Pilotprojekte. In Deutschland gibt es kaum Forschung diesem Bereich, es gibt keine Lehrpläne und es gibt keine mathematische Fachausbildung für diesen Bereich.

5.6 Schlussbemerkungen

In der Einleitung wurde das Zahlenstrahlbild von Pia gezeigt und als Ausgangspunkt für die folgenden Fragestellungen genommen. Unter anderem wurde dabei die Frage aufgeworfen, ob dieses Anschauungsbild unmathematisch sei, bzw. ab wann solch ein Bild mathematisch wird.

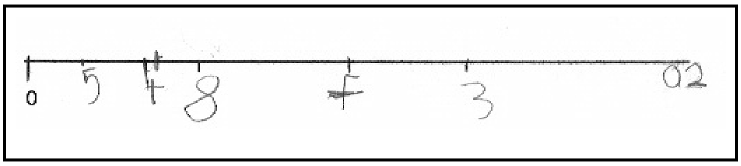


Abb. 5.05: Pias Zahlenstrahl

Für eine umfassende Beurteilung des fertigen, statischen Bildes müsste man in einer, an die Konstruktion anschließenden Interviewphase versuchen, herauszufinden, warum und wie Pia das Bild in der vorliegenden Form gezeichnet hat. Man hätte aber Pia auch bei der Anfertigung des Bildes beobachten können, um aus dem Ablauf der Konstruktion zu versuchen, den Kontext zu verstehen:

> Pia betrachtet zunächst die vorgegebenen Zahlen (12, 5, 7, 3, 8, 4) und den leeren Zahlenstrahl fast eine Minute lang. Dann sieht sie bei ihrer Nebensitzerin Hanah, dass diese den Zahlenstrahl mit 0 .. 20 bezeichnet hat und kopiert dies. Statt 20 schreibt sie allerdings ganz rechts 02 an den Strich. Dann zeichnet sie links die Zahl 5 ein, überlegt wieder und markiert die Zahl 7 in der Mitte. Sie schreibt 7 seitenverkehrt an die Markierung, die Schreibbilder der Ziffern werden also noch nicht sicher beherrscht. Pia bewegt den Stift zu 02, dann rückwärts Richtung Null, schreibt anschließend die Ziffer 3 und macht den Skalenstrich über die Ziffer. Die Richtung wird beibehalten und links von 7 die Zahl 8 notiert und markiert. Bevor die letzte Zahl notiert wird macht Pia wieder eine lange Pause, während der sie angestrengt ihr Bild betrachtet. Sie bewegt den Stift zu 3, dann zu 5 und macht rechts daneben eine Markierung auf den Strich. Pia schreibt die Ziffer 4 so, dass die Markierung als Teil der Ziffer gelesen werden kann, zögert kurz und macht eine neue Markierung über der Ziffer 4. Mit der Zahl 12, die aus den

beiden Ziffern 1 und 2 zusammengesetzt ist, kann Pia überhaupt nichts anfangen.

Die Konstruktion von Pia zeigt, dass der Zahlenstrahl aus einzelnen Relationen zwischen Zahlenpaaren aufgebaut wird. Die Kinder haben im Unterricht bisher nur einzelne Mengenoperationen, Relationen zwischen Zahlenpaaren und verbale Zählübungen bis 20 gemacht. Die Zahlenstrahldarstellung wurde noch nicht eingeführt. So etwas wie ein Gesamtüberblick über alle Zahlen im Zahlenraum ist noch nicht vorhanden. Meist wird die zuletzt notierte Zahl genommen und dann die neue Zahl in diesem Kontext hinzukonstruiert. So wird 5 zu 12 und dann 7 zu 5 konstruiert. Die falsch notierte Zahl 12 wird als 2 gelesen, zu der dann 3 hinzukonstruiert wird. Da der Strich nach rechts keine Fortsetzung hat, wird die Zahl 3 einfach nach links eingezeichnet. Für die folgende Zahl 8 wird diese Richtung beibehalten, wobei hier auch der Kontext 7,8 berücksichtigt wird. Um die letzte Zahl 4 einzeichnen zu können, wird der Kontext 3,4,5 genutzt, wobei für Pia 4 näher bei 5 als bei 3 liegt. Die wechselnden Notationsrichtungen am Zahlenstrahl zeigen, dass Pia die Konvention für die schriftliche Notation noch nicht sicher gelernt hat, dass die Zahlen in ihren verschiedenen engen Kontexten aber durchaus richtig notiert wurden. Auch die Konvention Ziffernbild der 7 wird noch nicht beherrscht.

Nur wenn diese Konventionen beherrscht werden, kann Mathematik bzw. mathematisches Wissen sicher kommuniziert werden. Pias Wissen besteht momentan aus unverbundenen Einzelkontexten oder mathematischen Teilkonzepten, ein Gesamtkonzept für die Anordnung der Zahlen ist noch nicht vorhanden. Wie entstehen aber solche Gesamtkonzepte aus Teilkonzepten? Die Teilkonzepte werden im Laufe der Zeit immer beziehungsreicher, es werden Verknüpfungen zu anderen Zahlen, zu den gezählten Zahlen, zu strukturierten Mengenbildern, zu Längenvorstellungen usw. hergestellt. Wenn diese beziehungsreichen Teilkonzepte sicher beherrscht werden, dann wird mentale Kapazität frei, um die Teilkonzepte zu übergreifenden Gesamtkonzepten zu verbinden. Der Klebstoff, der die Teilkonzepte zusammenfügt, könnte in diesem Fall das Zählen und vor allem entsprechende, auf Körpererfahrung beruhende Metaphern, die relationale Vorstellungen und Proportionalität unterstützen sein. Mengenhandlungen scheinen hier nicht weiter zu helfen sondern eher Relationen mit Längen und Bewegungshandlungen. Durch das Zählen bewegen sich Schüler wie in ihrer realen Umgebung über die Zahlen vorwärts und rückwärts. Wenn zum Zählen noch Körperbewegung kommt, dann kann ganz automatisch die Richtung des Zählens von links nach rechts (vorwärts) initiiert werden und die Zahlen sind nicht nur verbale Konstruktionen sondern werden mit Längenvorstellungen verknüpft.

Pias Beispiel zeigt auch, dass Mathematiklernen ein individueller Prozess ist, der sich nicht immer nach den mathematischen Strukturen und allen Konventionen richtet. Durch Aufzeichnungs- und Visualisierungswerkzeuge, wie sie im CEKA-Projekt entwickelt, genutzt und in dieser Arbeit präsentiert wurden, können die Abläufe dieser individuellen Wissenskonstruktionen aufgezeichnet und bei Bedarf wiedergegeben werden. Den Lehrenden wird so konstruktives Wissen, bzw. Wissen über Teilkonzepte, das Schüler bereits erworben haben, in anschaulicher Weise des informatischen Protokolls zugänglich gemacht.

Durch die Dynamik die sich in jeder Visualisierung der Bearbeitungsprotokolle zeigt, wird zusätzlich der Prozesscharakter des Lernens betont. Lernen ist ein aktiver, individueller, sich wiederholender Prozess, der eine immer bessere Anpassung an die Problemstellung erreicht. Damit rückt das individuelle Lernen in den Mittelpunkt des Interesses der Lehrpersonen. Dieses Lernen kann dann nicht mehr nur über Lernzielkategorien beschreiben werden, sondern muss mit Hilfe von evaluierenden Forschungsmethoden begleitet und unterstützt werden. Der Lehrer ist in solch einem Kontext nicht länger der Kontrolleur, der erreichte Lernziele abhakt, sondern wird zum Organisator und zum Forscher, der versucht, möglichst viel über die Lernprozesse der einzelner Kinder herauszufinden, um diese Kinder dann individuell fördern und fordern zu können.

Die in den Computermikrowelten von den Konstruktionen der Schüler erzeugten informatischen Protokolle, die ohne viel Aufwand nebenher entstehen, können dann erste Hinweise liefern, welche Kinder an welchen Stellen des Lernprozesses möglicherweise Probleme haben und deshalb genauer beobachtet werden müssen. Hilfreich wäre hier auch eine Ergänzung der informatischen Protokollierung durch Integration von Ton- und Videoaufnahmen in die Protokolle. Dies würde dann eine gezielte individuelle Evaluation bestimmter Stellen des Lernprozesses ermöglichen, die außerdem noch zeitversetzt stattfinden könnte. Diese letzten Überlegungen machen auch deutlich, dass der Einsatz neuer Medien und neuer Verfahren der Evaluation Lehrpersonen nicht ersetzten wird, sondern sie unterstützt und in ihren Aktionen, das Lernen der Schüler zu verbessern, effektiver machen könnte.

6 Verzeichnisse

6.1 Abbildungen

6.2 Tabellen

6.3 WWW-Links

Bildungsplan: http://www.bildung-staerkt-menschen.de (22/02/05)

Deutsche LOGO-Version: http://www.ph-ludwigsburg.de/mathematik/software (22/02/05)

Eurologo: http://www.eurologo.org (01/04/04)

Geary 1999: Mathematical Disabilities: What we know and don't know. In: http://www.ldonline.org/ld_indepth/Math-skills/geary_math_dis.html (07/04/04)

Gersten/Chard 1999: Number Sense: Rethinking Arithmetic Instruction for Students with Mathematical Disabilities. In: http://www.ldonline.org/ld_indepth/Math-skills/gersten_dyscalculia.html (07/04/04)

Grüne Reihe: http://www.ph-ludwigsburg.de/mathematik/software/

Jurtle: http://www.jurtle.com oder http://www.otherwise.com/Jurtle.html (22/02/05)

KIM 2002: http://www.mpfs.de/studien/kim (07/05/04)

KIM 2003: http://www.mpfs.de/studien/kim (07/05/04)

NCTM: http://www.nctm.org (22/02/05)

PH Ludwigsburg: http://www.ph-ludwigsburg.de (22/02/05)

Datum des Zugriffs: **(tt/mm/jj)**

6.4 Bezugsquellen Software

6.4.1 LOGO-Systeme und LOGO-ähnliche (Stand: Jan. 04)

aktuelle Hinweise zu LOGO-Systemen und anderen LOGO-Seiten findet man unter http://www.eurologo.org

Name	WWW-Adresse	freeware
Elica-Logo	http://www.elica.net	X
E-Slate	http://e-slate.cti.gr	X
IMAGINE	http://www.logo.com/imagine	
microworlds	http://www.microworlds.com	
MSWLogo-eng	http://www.softronix.com/logo.html	X
MSWLogo-deu	http://www.ph-ludwigsburg.de/mathematik/software	X
NetLogo	http://ccl.sesp.northwestern.edu/netlogo	X
Python	http://www.python.org	X
Squeak	http://www.squeak.org	X
Starlogo	http://education.mit.edu/Starlogo	X

Tab. 6.01: LOGO-Software

6.5 Bibliographie

Abelson, H. (1985). Einführung in Logo. 2. Erw. Aufl. Vaterstetten (IWT).

Abelson, H.; diSessa, A. (1981). Turtle Geometry - The Computer as a Medium for Exploring Mathematics. Cambridge (MIT Press).

Aebli, H. (1975). Psychologische Didaktik. Stuttgart (Klett).

Arenhövel, F. (1994). Computereinsatz in der Grundschule. Donauwörth (Auer).

Aster, v. M.G. (1996): Die Störungen des Rechnens und der Zahlenverarbeitung in der kindlichen Entwicklung. Zürich (Habilitationsschrift Medizinische Fakultät der Universität).

Aufenanger, S. (1999). Lernen mit neuen Medien. Was bringt es wirklich? In: LOG IN 19 (1999) Heft 6 S.16ff.

Backhaus, K.; Erichson, B.; Plinke, W.; Weiber, R. (2003). Multivariate Analysemethoden. Eine anwendungsorientierte Einführung. Zehnte, neu bearbeitete und erweiterte Auflage. Berlin, Heidelberg, New York (Springer).

Balstaedt, S.-P. (1997). Wissensvermittlung. Die Gestaltung von Lernmaterial. Weinheim (Beltz).

Baroody, A.J. (1992a). The Preschoolers' Counting Skills and Principles. In: Pathways to Number , J. Bideaud, C. Meljac, J.-P. Fischer (Edt.). Hillsdale (Erlbaum), S.99-126.

Baroody, A.J. (1992b). Remedying Common Countig Difficulties. In: Pathways to Number , J. Bideaud, C. Meljac, J.-P. Fischer (Edt.). Hillsdale (Erlbaum), S.307-323.

Baumgartner, P. ; Payr, S. (1994). Lernen mit Software ; Innsbruck.

Boytchev, P. (2003). Turtle Metamorphoses (From „FD1" To 3D Animated Characters). In: Futschek, G. (ed.) EUROLOGO 2003 be creative… Re-inventing tecnology on education. Proceedings of the 9th European Logo Conference, Porto, Portugal. Coimbra (Cnotinfor), S.50-61.

Breuer, G. (1992). Freie Arbeit im 1. und 2. Schuljahr. München (Oldenburg).

Bruner, J.S. (1974). Entwurf einer Unterrichtstheorie. Berlin (Berlin-Verlag).

Bühl, A.; Zöfel, P. (2002). Erweiterte Datenanalyse mit SPSS. Statistik und Data Mining. Wiesbaden (Westdeutscher Verlag).

Burton, G. (1991). Kindergarten book. (Curriculum and evaluation stadanrds for school mathematics addenda series. Grades K-6). Reston (NCTM).

Butterworth, B. (1999). The Mathematical Brain. London (Macmillan).

Dehaene, S. (1999). Der Zahlensinn oder warum wir rechnen können. Basel, Boston,Berlin (Birkhäuser).

Dehaene, S. (1997). The Number Sense. How the Mind Creates Mathematics. New York; Oxford (Oxford Press).

Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. Cognition, 44, 1-42.

DEMAT1+ (2002). Deutscher Mathematiktest für erste Klassen. Göttingen (Beltz).

Devlin, K. (2002). Das Mathe-Gen oder wie sich das mathematische Denken entwickelt und warum Sie Zahlen ruhig vergessen können. Stuttgart (Klett-Cotta).

Devlin, K. (1990). Sternstunden der modernen Mathematik: berühmte Probleme und neue Lösungen. Basel, Boston , Berlin (Birkhäuser).

Dienes, Z.P. (1965). Moderne Mathematik in der Grundschule. Freiburg i.B. (Herder).

Dreyer, E, (2002). Zahlverständnis und Zahlbegriffsentwicklung im mathematischen Anfangsunterricht der Grundschule unter der besonderen Berücksichtigung des Maßzahlaspekts. Ludwigsburg (Pädagogische Hochschule)

Edelmann, W. (1996). Lernpsychologie. 5., vollst. überarbeitete Auflage; Weinheim; Basel (Beltz).

Fischer, J.-P. (1992). Subitizing: The Discontinuity After Three. In: Pathways to Number , J. Bideaud, C. Meljac, J.-P. Fischer (Edt.). Hillsdale (Erlbaum), S.191-208.

Freudenthal, H. (1973). Mathematik als pädagogische Aufgabe. Stuttgart (Klett).

Fuson,K.C. (1992a). Realtionships Between Counting and Cardinalitiy Form Age 2 to Age 8. In: Pathways to Number , J. Bideaud, C. Meljac, J.-P. Fischer (Edt.). Hillsdale (Erlbaum), S.127-149.

Fuson,K.C.; Kwon, Y. (1992b). Learning Addition and Subtraction: Effects of Number Words and Other Cultural Tools. In: Pathways to Number , J. Bideaud, C. Meljac, J.-P. Fischer (Edt.). Hillsdale (Erlbaum), S.283-306.

Gagné, R.M.; Briggs, L.J.; Wagner, R. (1979). Principles of Instructional Design. 2.Aufl, New York (Holt, Rinehart u. Winston).

Gallin, P.; Ruf, U. (1991). Sprache und Mathematik in der Schule. Zürich (LCH).

Geary, D.C. (1994). Children's mathematical development: research and practical applications. London (American Psychological Association).

Gelman, R.; Gallistel, C.R. (1978). The Childs Understanding of Number. Cambridge (MA), London (Harvard University Press).

Gerster, H.-D. (1994). Arithmetik im Anfangsunterricht. In: Abele, A.; Kalmbach, H. (Hrsg.): Handbuch der Grundschulmathematik. Bd. 1. Stuttgart (Klett). S.35-102.

Ginsburg, H.; Opper, S. (1998). Piagets Theorie der geistigen Entwicklung. Stuttgart (Klett).

Glasersfeld, E. (1987). Preliminaries to any theory or representation. In: Janvier, C. (Hrsg.): Problems of representation in the teaching and learning of mathematics. Hillsdale (Earlbaum). S. 215-225.

Glasersfeld, E. (1990). An Exposition of Constuctivism: Why some Like it Radical. In: Constructivist views on the teaching and learning of mathematics. Hrsg.: Davis, R.B.; Maher, C.A.; Noddings, N. (Journal for research in mathematics education. Monograph No. 4). Reston, Virginia (NCTM).

Glasersfeld. E. (1991). Abstraction, Re-Presentation, and Reflection: An Interpretation of Experience and Piaget's Approach. In: Steffe, L.P. (Ed.): Epistemological Foundations of Mathematical Experience. New York, Berlin,Heildeberg (Springer). S.45-67.

Grassmann, M. (1995a). Arithmetische Kompetenz von Schulanfängern - Schlussfolgerungen für die Gestaltung des Anfangsunterrichts. Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe, Heft 7, S.203,303,314-321.

Grassmann, M. (1995b). Arithmetische Kompetenz von Schulanfängern in Berlin und Brandenburg. In: Beiträge zum Mathematikunterricht GDM 1995, Hildesheim (Franzbecker), S.186-189.

Griesel, H. (1973). Die Neue Mathematik für Lehrer und Studenten. Band 2: Größen, Bruchzahlen und Sachrechnen. Hannover (Schroedel).

Griesel, H. (1974). Die Neue Mathematik für Lehrer und Studenten. Band 3: Rationale Zahlen, Algorithmen, Verknüpfungen, Gruppen, Körper. Hannover (Schroedel).

Grüne Reihe: Institut für Mathematik und Informatik - Pädagogische Hochschule Ludwigsburg : Informatik und Datenverarbeitung in der Schule - Materialien und Berichte ; Heft 1 - 25

Harvey, B. (1984). Why Logo? In: New Horizons in Educational Computing. Chinchester (Ellis Horwood), S.21-39.

Harvey, B. (2001). Harmful for Cildren? The Alliance for Childhood Report. In: Futschek, G. (ed.) EUROLOGO 2001 A Turtle Odyssey. Proceedings of the 8th European Logo Conference, Linz, Austria. Wien (Österreichische Computer Gesellschaft), S.25-31.

Hasebrook, J. (1995). Multimedia-Psychologie: Eine neue Perspektive menschlicher Kommunikation. Heidelberg, Berlin, Oxford (Spektrum).

Hasemann, K. (2001). 'Zähl doch mal!' - Die nummerische Kompetenz von Schulanfängern. Sache-Wort-Zahl, Heft 35, S.53-58.

Hengartner, E.; Röthlisberger, H. (1994). Rechenfähigkeit von Schulanfängern. In: Brüggelmann, H. Et.al. (Hg.) Am Rande der Schrift. Zwischen sprachenvielfalt und Analphabetismaus, S. 66-86. Konstanz.

Heuvel-Panhuizen van, M. (1996). Assessment and Realistic Mathematics Education. Culemborg (TechniPress).

Hoffmann, J. (1993). Vorhersage und Erkenntnis. Die Funktion von Antizipation in der menschlichen Verhaltenssteuerung und Wahrnehmung. Göttingen, Bern, Toronto (Hogrefe).

Hofmann, S. (2002). Diagnose und Fördermöglichkeiten bei Rechenschwäche. In: Birkholz, J.; Dinges, E.; Worm, H.-L.: Förderpädagogik Mathematik. Horneberg (Persen) S.11-110.

Hoppe, H.U. (1984). Logo im Mathematikunterricht. Vaterstetten (IWT).

Johann, M. (1999). Eine empirische Theorie des Zahlbegriffs. Frankfurt a. M. (Lang).(Europäische Hochschulschriften: Reihe 11, Pädagogik ; Bd.791).

Johnson-Laird, P.N. (1983). Mental models. Towards a cognitive science of language, inference and consiousness. Cambridge (Cambrigde Univerisity Press).

JRME Nr. 10 (2001). Journal for Research in Mathematics Educatiuon, Logo and Geometry, Monograph Number 10, by Clements, D.H.; Battista, M.T. Reston (NCTM)

Kamke, E. (1955). Mengenlehre. Berlin (De Gryuter). Sammlung Göschen Band 999/999a.

Kaufmann, S. (2001) Früherkennung von Rechenstörungen in der Eingangsklasse der Grundschule und darauf abgestimmte remediale Maßnahmen. Ludwigsburg (Dissertation a.d. Pädagogischen Hochschule).

Klaudt, D. (2003). Exploring number sense - a research project in Primary School using Logo. In: Futschek, G. (ed.) EUROLOGO 2003 be creative… Re-inventing tecnology on education. Proceedings of the 9th European Logo Conference, Porto, Portugal. Coimbra (Cnotinfor), S.62-68.

Klaudt, D.; Spannagel, C. (2004). Computerunterstütztes Operieren am mentalen Zahlenstrahl. In: Erziehung und Unterricht - Österreichische Pädagogische Zeitschrift, Heft 3/4 2004. S. 246-257.

Kommers, P.A.M., Grabinger, S., Dunlap, J.C. (1996). Hypermedia Learning Environments: Instructional Design and Integration. Hillsdale NJ (Lawrence Erlbaum).

Krauthausen, G.; Scherer, P. (2003). Einführung in die Mathematikdidaktik, 2. Auflage. Heidelberg, Berlin (Spektrum).

Krauthusen, G. (1995). Die 'Kraft der Fünf' und das denkende Rechnen. In: Müller, G.N./Wittmann, E.C.(Hrsg.): Mit Kindern rechnen. Hannover (Arbeitskreis Grundschule No. 96); S.87-108.

Kristof, R., Satran, A. (1995). Interactivity by Design: Creating & Communicating with New Media. ; Mountain View (Adobe Press).

Kynigos, C. (1992). The turtle metaphor as a tool for children's geometry. In: Hoyles, C.; Noss, R., Learning Mathematics and Logo. Cambridge (MIT Press), S. 97-126.

Lakoff, G.; Nunez, R.E. (2000). Where Mathematics comes from. How the embodied Mind brings Mathematics into Being. New York (Basic Books).

Lakoff, G.; Johnson, M. (1998). Leben in Metaphern. Heidelberg (Carl Auer).

Lawler, B. (1984). Designing computer-based microworlds In: New Horizons in Educational Computing. Chinchester (Ellis Horwood), S.40-53.

Lauter, J. (1991). Fundament der Grundschulmathematik. Donauwörth (Auer).

Lorenz, J.H. (2002). Mathematisches Vorwissen im Anfangsunterricht. Grundschule 5/2002, S.24-26. Braunschweig (Westermann).

Lorenz, J.H. (1997). Kinder entdecken die Mathematik. Braunschweig (Westermann).

Lorenz, J.H. (1993a, Hrsg.). Mathematik und Anschauung. Köln: (Aulis Verlag Deubner). (IDM-Reihe ; Bd. 18)

Lorenz, J.H. (1993b). Eine Rechenstörung früh erkennen… Geht das? Und: hilft es den Kindern?. Grundschule 6/1993 , 8-9. Braunschweig (Westermann) .

Lorenz, J.H. (1993c). Handbuch des Förderns im Mathematikunterricht / Jens Holger Lorenz; Hendrik Radatz. Hannover (Schroedel).

Lorenz, J.H. (1992). Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht. Göttingen; Toronto; Zürich (Hogrefe).

Lorenzen, P. (1962). Metamathematik. Mannheim (Bibliographisches Insitut).

Löthe, H. (1985). Übersetzung von: Papert, Seymour : Gedankenblitze ; Kinder, Computer und Neues Lernen ; Rowohlt(rororo Computer Nr.8126; Hamburg).

Löthe, H. (1992). Conceptual defined Turtles. In: Hoyles, C.; Noss, R., Learning Mathematics and Logo. Cambridge MIT Press, S. 55-96.

Macaruso, P.; Sokol S.M. (1998). Cognitive neuropsychologie and developmental dyscalculia. In: The Development of Mathematical Skills; Donlan, C (Edt.), Hove (Psychology Press), S.201-226.

Maier, H. (1990). Didaktik des Zahlbegriffs, Hannover (Schroedel).

Mayring, P. (2003). Qualitiative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken. 8. Aufl., Weilheim; Basel (Beltz).

McClosky, M.; Caramazza, A.; Basili, A.G. (1985). Cognitive mechanisms in number processing and calculation: Evidence from dycalculia. In: Brain and Cognition, 4 , S.171-196.

Merill, M.D.; Li, Z.; Jones, M.K. (1992). An Introduction to Instructional Transaction Theory. In: Dijkstra, S.; Krammer, H.P.M.; van Merrienboer, J.J.G.: Instructional Models in Computer-Based Learning Environments (NATO Asi Series, Series F: Computer and Systems Science; 104. Berlin;Heidelberg (Springer).

Mertz, D. (2003). Text Processing in Python. München, London, New York (Addison-Weslay; Pearson Education).

Miller G. A. (1956). The Magical Number Seven, Plus or Minus Two: Some Limits on Our Capacity for Processing Information. In: The Psychological Review, 1956, vol. 63, S. 81-97.

Mitzlaff, H.; Speck-Hamdan, A.; Hrsg. (1998). Grundschule und neue Medien. Frankfurt/Main (AK Grundschule Nr. 103).

Moser Opitz, E. (2001). Zählen, Zahlbegriff, Rechnen: Theoretische Grundlagen und eine empirische Untersuchung zum mathematischen Erstunterricht in Sonderklassen. Bern, Stuttgart, Wien (Haupt).

Müller, G.N.; Wittmann, E.Ch. (1995, Hrsg.). Mit Kindern rechnen. Frankfurt a. M. (Arbeitskreis Grundschule); Beiträge zur Reform der Grundschule Bd. 96.

Müller G.; Wittmann, E.Ch. (1984). Der Mathematikunterricht in der Primarstufe. Braunschweig, Wiesbaden (Vieweg).

Moser Opitz, E. (2001). Zählen, Zahlbegriff, Rechnen: Theoretische Grundlagen und eine empirische Untersuchung zum mathematischen Erstunterricht in Sonderklassen. Bern, Stuttgart, Wien (Haupt).

Nührenbörger, M. (2002). Denk- und Lernwege von Kindern beim Messen von Längen. Hildesheim; Berlin (Franzbecker).

Padberg, F. (1992). Didaktik der Arithmetik. - 2. vollst. überarb. und erw. Aufl. Mannheim;Leipzig;Wien;Zürich (BI Wissenschaftsverlag).

Paivio, A. (1986). Mental Representations: A Dual coding Approach. New York (Oxford University Press).

Papert, S. (1998). Die vernetzte Familie - Kinder und Computer. Stuttgart (Kreuz-Verlag).

Papert, S. (1994). Revolution des Lernens: Kinder, Computer, Schule in einer digitalen Welt. Hannover (Heise).

Papert, S. (1985). Gedankenblitze ; Kinder, Computer und Neues Lernen. (deutsche Ausgabe: rororo Computer Nr.8126) , Hamburg (Rowohlt).

Papert, S. (1984). Tomorrow's Classrooms. In: New Horizons in Educational Computing. Chinchester (Ellis Horwood), S.17-20.

Piaget, J. (1999). Über Pädagogik. Weinheim; Basel (Beltz).

Piaget, J.; Szeminska, A. (1975a). Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde. Gesammelte Werke 3, Studienausgabe. Stuttgart (Klett).

Piaget, J. (1975b). Die Entwicklung des Erkennens I. Das mathematische Denken. Gesammelte Werke 8, Studienausgabe. Stuttgart (Klett).

Pohl, C. (1995). Transparente Navigation in einem hypermedialen Lehr-/Lernsystem. In: Schoop, E., Witt, R., Glowalla, U. (Hrsg.): Hypermedia in der Aus- und Weiterbildung: Dresdner Symposium zum computerunterstützten Lernen. Schriften zur Informationswissenschaft Bd. 17. Konstanz (Universitätsverlag). S. 155-160.

Radatz, H.; Schipper, W.; Dröge, R.; Ebeling, A. (1996). Handbuch für den Mathematikunterricht 1. Schuljahr. Hannover (Schroedel).

Radatz, H.; Schipper, W. (1983). Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen; Hannover (Schroedel).

Resnik, L.B. (1989). Knowing, Learning and Instruction. Essays in Honor of Robert Glaser. Hillsdale (Lawrence Earlbaum).

Rickert, F. (2002). Metaphern in der Computerfachsprache. Zur Entstehung und Entwicklung von Fachausdrücken. Berlin (Tenea).

Rittle-Johnson, B.; Siegler, R.S. (1998). The relationship between conceptual and procedural knowledge in learning mathematics: A review. In: The Development of Mathematical Skills; Donlan, C (Edt.), Hove (Psychology Press), S.73-110.

Runkler, T.A. (2000). Information Mining - Methoden, Algorithmen und Anwendungen intelligenter Datenanalyse. Braunschweig/Wiesbaden (Vieweg).

Ruwisch, S. (2002). Multiplikatives Verständnis in Sachkontexten. In: Birkholz, J.; Dinges, E.; Worm, H.-L.: Förderpädagogik Mathematik. Horneberg (Persen), S.111-162.

Schmidt, S.; Weiser, W. (1986). Zum Maßzahlverständnis von Schulanfängern. Journal für Mathematikdidaktik, 7 (2/3), S.121-154.

Schmidt, S.; Weiser, W. (1982). Zählen und Zahlverständnis von Schulanfängern. In: Journal für Mathematikdidaktik Heft 3/4(1982) S.227-236.

Schulmeister, R. (1997). Grundlagen hypermedialer Lernsysteme: [Theorie - Didaktik - Design. 2. aktualisierte Aufl. - München,Wien,Oldenburg (Oldenburg).

Seel, N.M. (2000). Psychologie des Lernens: Lehrbuch für Pädagogen und Psychologen. München; Basel (E.Reinhardt).

Selter, C. (1995). Eigenproduktionen im Arithmetikunterricht. In: Müller, G. N./Wittmann, E. C.: Mit Kindern rechnen; Frankfurt (1995), S.138-150.

Selter, C. (1994). Eigenproduktionen im Arithmetikunterricht der Primarstufe. Wiebaden (Deutscher Universitäts-Verlag).

Selter, C.; Spiegel, H. (2003). Kinder & Mathematik. Was Erwachsene wissen sollten. Seelze-Velber (Kallmeyer).

Selter, C.; Spiegel, H. (1997). Wie Kinder rechnen. 1.Aufl. Leipzig, Stuttgart (Klett) .

Sophian, C. (1998). A developmental perspective on children's counting. In: The Development of Mathematical Skills; Donlan, C (Edt.), Hove (Psychology Press), S.27-46.

Sophian, C. (1992). Learning About Numbers: Lessons for Mathematics Education From Preschool Number Development. In: Pathways to Number , J. Bideaud, C. Meljac, J.-P. Fischer (Edt.). Hillsdale (Erlbaum), S.19-40.

Souvignier, E. (2000). Förderung räumlicher Fähigkeiten. Münster (Waxmann).

Spitzer, M. (2002). Lernen: Gehirnforschung und Schule des Lebens. Heidelberg, Berlin (Spektrum).

Stern, E. (1992) Die spontane Strategieentdeckung in der Arithmetik. In: Mandl/Friedrich: Lern- und Denkstrategien. Analyse und Intervention. Göttingen, Zürich (Hogrefe). S.101-123.

Stern, E. (1998). Die Entwicklung des mathematischen Verständnisses im Kindesalter. Lengerich (Pabst).

Stigler, J.W. (1984). 'Mental abacus': The effects of abacus training on Chinese children's mental calculation. In: Cognitive Psychologie, 16, 145-176.

Suter, A.D. (1990). Number Sense - Discovering Basic Math Concepts; Teachers Guide. Chicago (Contemporary Books).

Taschner, R. (1991). Lehrgang der konstruktiven Mathematik - 1.Teil: Zahl und Kontinmuum; Wien (Manz).

Towse, J.; Saxton, M. (1998): Mathematics across national boundaries: Cultural and liguistic perspectives on numerical competence. In: The Development of Mathematical Skills; Donlan, C (Edt.), Hove (Psychology Press), S.129-150.

Voigt, J. (1993). Unterschiedliche Deutungen bildlicher Darstellungen zwischen Lehrerin und Schülern. In: Lorenz, J.H. (Hrsg.): Mathematik und Anschauung , IDM Band 18. Köln (Aulis). S.147-166.

Weidenmann, B. (1997a). Multicodierung und Multimodalität im Lernprozeß. In: Issing, L., Klimsa, P. (Hrsg.): Information und Lernen mit Multimedia, 2. überarbeitete Auflage. Weinheim, Basel (Beltz). S. 65-84.

Weidenmann, B (1997b). Abbilder in Multimedia-Anwendungen. In: Issing, L.; Klimsa, P. (Hrsg.): Information und Lernen mit Multimedia, 2. überarbeitete Auflage. Weinheim, Basel (Beltz). S. 107-121.

Wittmann, E.Ch.; Müller, G.N. (1990). Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 1. Vom Einspluseins zum Einmaleins. Stuttgart; Düsseldorf (Klett).

Wittmann, E.Ch.; Müller, G.N. (1990). Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 2. Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen. Stuttgart; Düsseldorf (Klett).

Wynn,K. (1998). Numerical competence in infants. In: The Development of Mathematical Skills; Donlan, C (Edt.), Hove (Psychology Press), S.3-25.

Zöfel, P. (2002). Statistik verstehen. München (Addison-Wesley).

7 Anlagen

Anlage A0: Zeitliche Übersicht der einzelen Untersuchungen

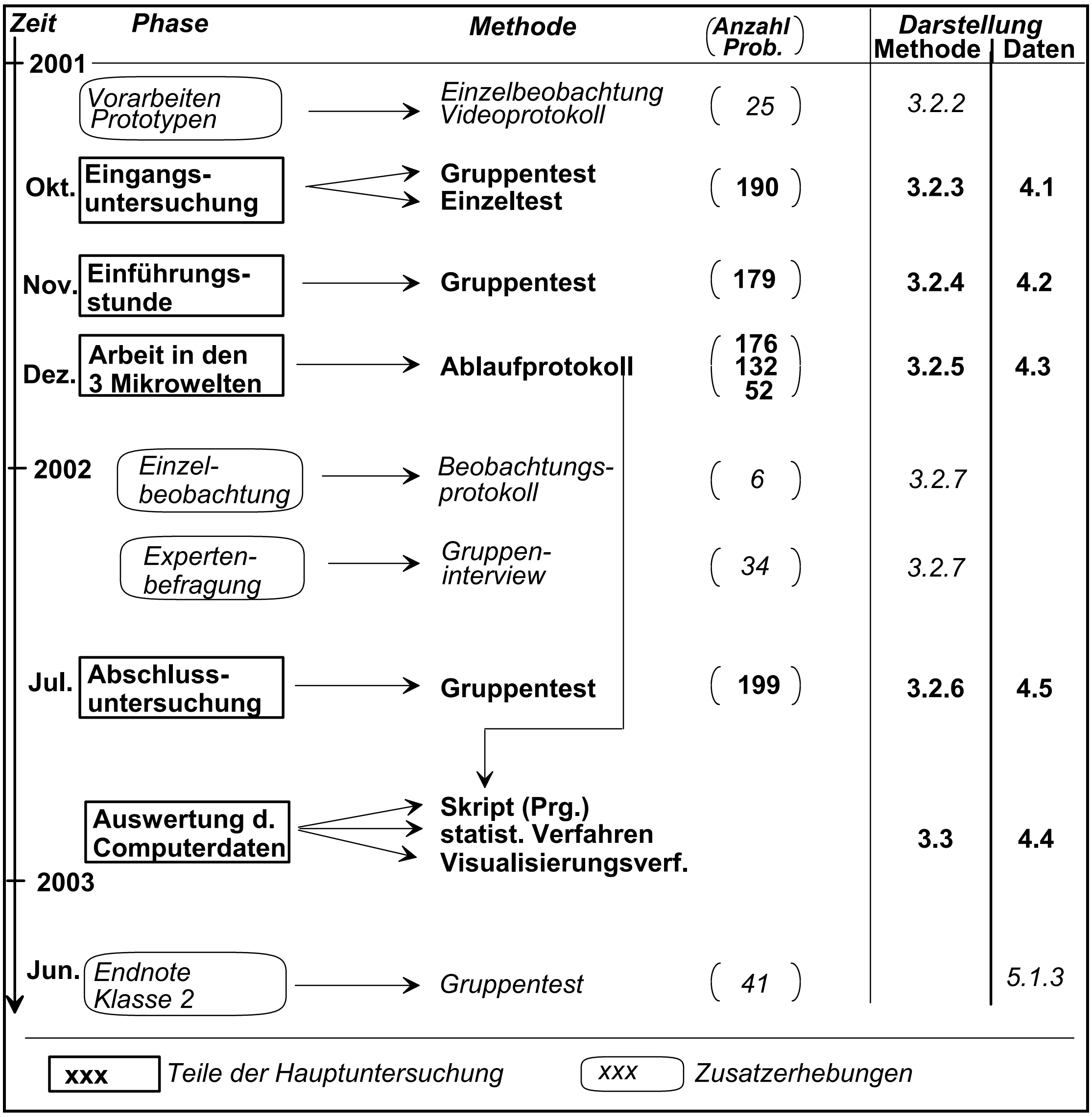


Abb. 7.01: Ablaufplan der Untersuchungen

Anlage A1: Eingangsuntersuchung - Aufgaben Gruppentest

Kurzbeschreibung der Aufgaben:

Anweisungen für Form A und B Gruppentest

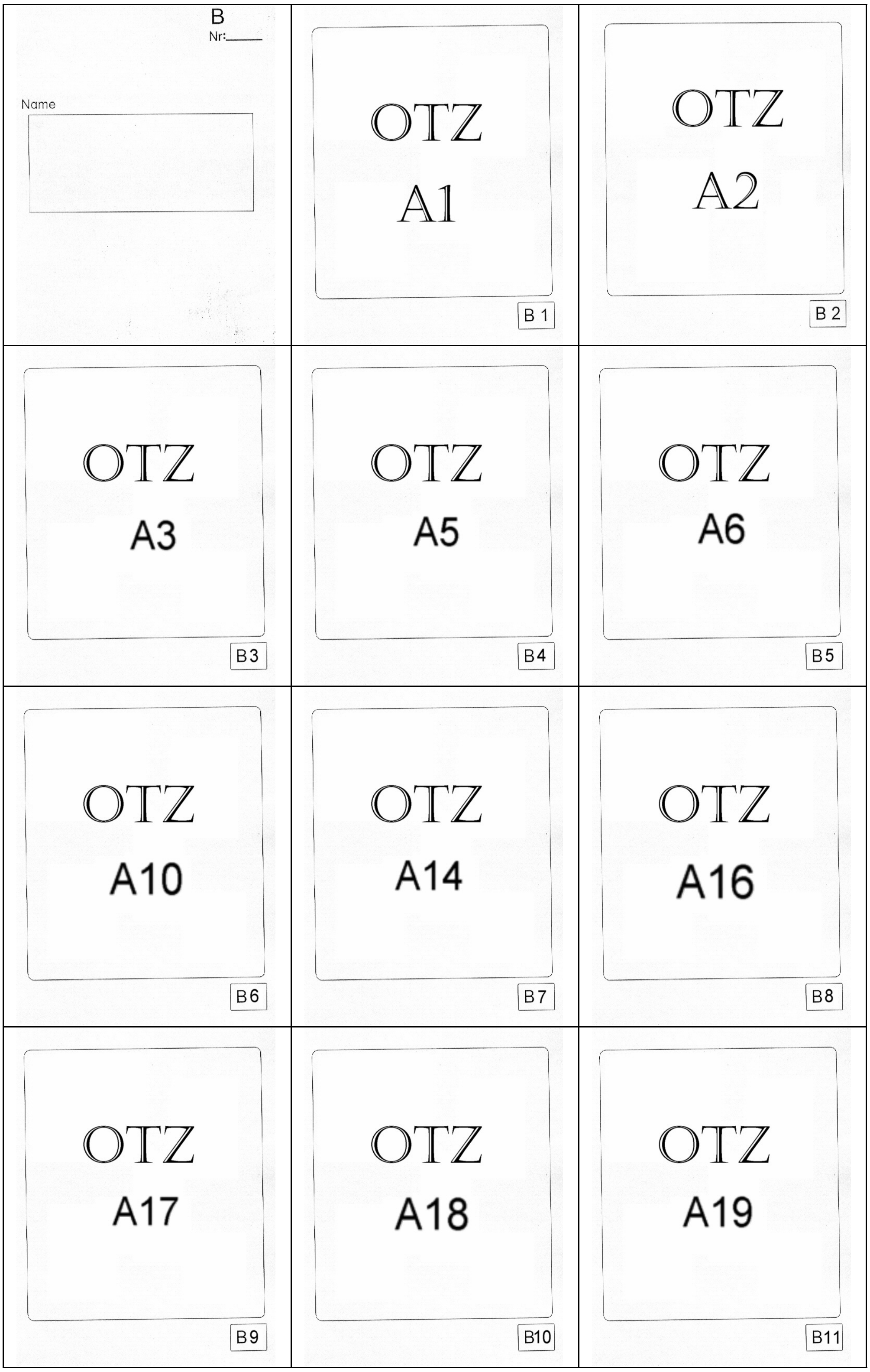
Nimm einen Stift und schreibe deinen Namen auf das Heft. Warte bis das Kommando zum Umblättern kommt! *(warten bis alle Namen geschrieben sind,.....)* . **Wir blättern um**!
Erst anfangen, wenn „Male jetzt" gesagt wird!
A/B1: Hier siehst du Pilze. Male ein Kreuz unter den Pilz, der höher ist als die Blume oben in dem Kasten!
Folie: Beispiel „Kreuz" geben - Beispiel „an" - Warten .... 'Wir blättern um!'
Die Aufgabe mit den Pilzen war für alle gleich, ab jetzt hat jeder seine eigenen Aufgaben !
A/B2: Hier siehst du Männer. Male ein Kreuz unter den Mann, der dicker ist als der Mann in dem Kasten!
A/B3: Hier siehst du Gebäude. Male ein Kreuz unter das niedrigste Gebäude!
A/B4: Hier siehst du Kisten mit Murmeln. Male ein Kreuz unter die Kiste mit den wenigsten Murmeln.
A/B5: Schaue dir diese Bilder an. Was kann nicht fliegen? Male ein Kreuz darunter!
A/B6: In dem Kasten oben siehst du einen Apfel mit Stiel, ohne Blatt und mit einem Würmchen, das aus dem Apfel herauskommt. Male ein Kreuz unter alle Äpfel, die genau gleich aussehen.
A/B7: Hier siehst du drei Kästen mit Hühnern und Eiern. Male ein Kreuz unter den Kasten, in dem jedes Huhn jeweils ein Ei gelegt hat. Du darfst auch Linien zeichnen.
A/B8: Hier siehst du Kästen mit Äpfeln. Male ein Kreuz unter den Kasten, in dem die Äpfel von groß nach klein geordnet sind.
A/B9: Hier siehst du Kästen mit Zuckerstangen. Male ein Kreuz unter den Kasten, in dem die Zuckerstangen von dünn nach dick geordnet sind.
A/B10: Hier siehst du Kästen mit Murmeln. Male ein Kreuz auf den Kasten, in dem die Murmeln von klein und hell nach groß und dunkel geordnet sind.
A/B11: Hier siehst du Hunde. Jeder Hund hat einen Stock bekommen. Ein großer Hund bekommt einen großen Stock und ein kleiner Hund bekommt einen kleinen Stock. Zeichne Linien von den Hunden zu den Stöcken, die sie bekommen.
A/B12: Unten auf dem Blatt siehst du Stapel mit Brotscheiben in einer Reihe. Es werden immer weniger Brotscheiben. Der Stapel oben in dem Kasten gehört irgendwo in die Reihe hinein. Male ein Kreuz auf die Stelle, wo dieser Stapel in die Reihe gehört.
A/B13: Male ein Kreuz unter die 9. Blume!
A/B14: Male ein Kreuz unter die 18. Blume!
A/B15: Hier siehst du Bleistifte. Kreuze den Stift an, der genauso lang ist wie der Stift unten!
A/B16: Hier siehst du Bleistifte. Kreuze den Stift an, der genauso lang ist wie der Stift unten!
A/B17: Hier siehst du Bleistifte. Kreuze den Stift an, der genauso lang ist wie der Stift unten!
A/B18: Hier siehst du Bleistifte. Kreuze den Stift an, der genauso lang ist wie der Strich unten!
A/B19: Hier siehst du Bleistifte. Kreuze den Stift an, der genauso lang ist wie der Strich unten!
A/B20: Hier siehst du zusammengesteckte Schlangen aus verschiedenen Würfeln. Kreuze die Schlange an, die genauso lang ist wie die Würfelreihe unten!
A/B21: Hier siehst du Würfelschlangen. Kreuze die Schlange an, die genauso lang ist wie der Strich unten!
A/B22: Hier siehst du Würfeltürme. Kreuze den Turm an, der genauso hoch ist wie der Strich unten lang!
A/B23: Hier siehst du Würfeltürme. Kreuze oben den Turm an, der genauso hoch ist, wie die Schlange unten anzeigt!
A/B24: Hier siehst du Würfeltürme aus verschiedenen Würfeln. Kreuze den höchsten Turm an!
A/B25: Zeichne ein Lineal in den Kasten !

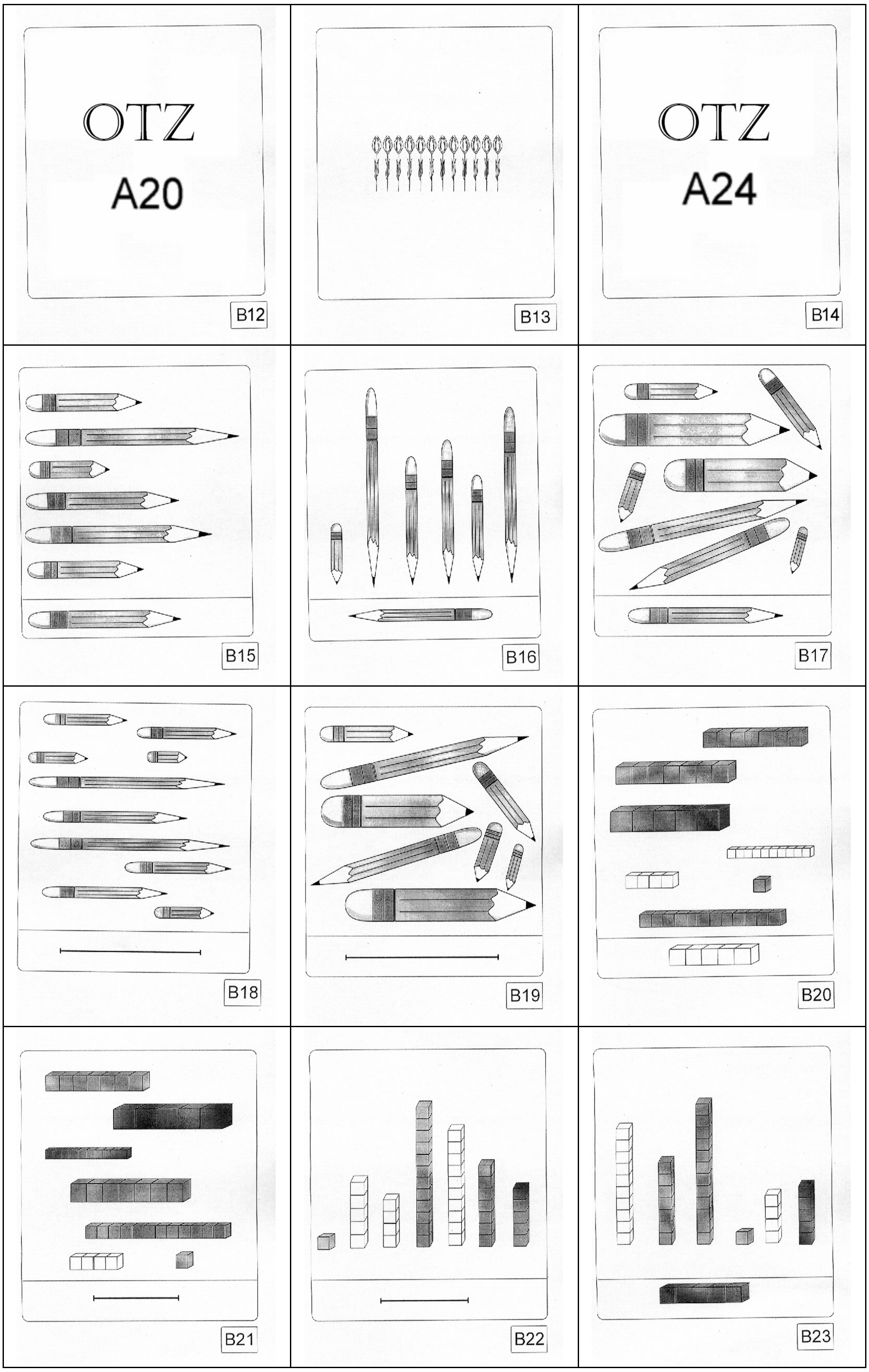
Anlage A2: Eingangsuntersuchung - Aufgaben Einzeltest

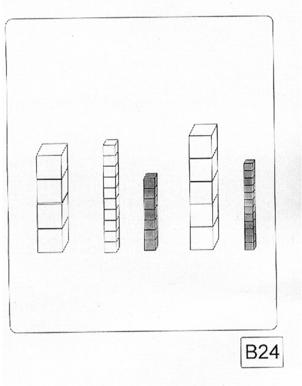
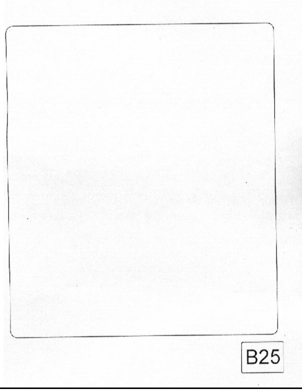
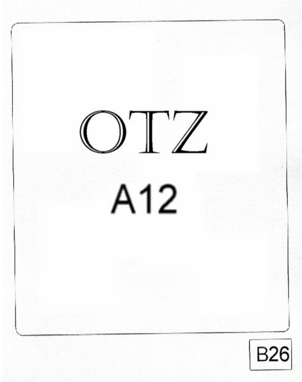
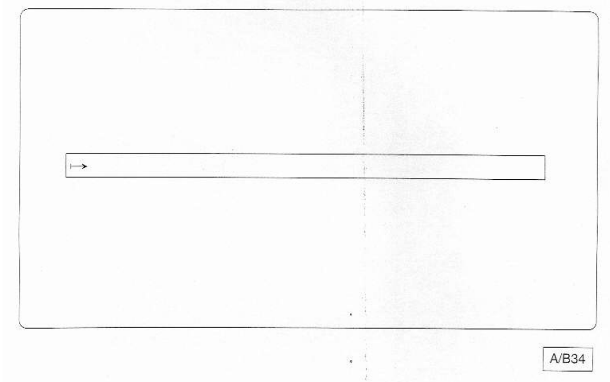
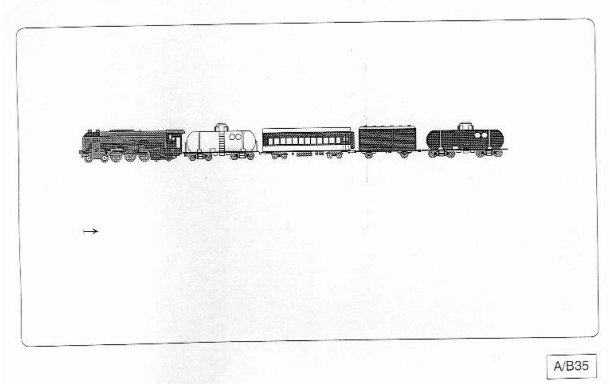
Kurzbeschreibung der Aufgaben

Aufgabe:	Bemerkungen
A/B26: (Ex. gibt dem Kind 15 Holzwürfel) **Ich habe mit zwei Würfeln diese Zahl gewürfelt** (Ex zeigt Blatt m. Würfelbildern 5 und 6). **Kannst du die gleiche Anzahl von Holzwürfeln auf den Tisch legen?**	*Würfelbild* 0 alle gezählt 0 weiter gezählt 0 sofort erfasst *...gelegt* 0 Gesamtzahl 0 einzelne Zahlen 0 zugeordnet nach Würfelbild
A/B27: (Ex. zeigt Blatt) **In dem Kasten oben siehst du 15 Luftballons. Zeige auf den Kasten, in dem genauso viele Punkte sind wie hier Luftballons**	0 zählt 0 rechnet (3 Fünfen) 0 zeigt__, weil?
A/B28: **Zähle bis 20**	gezählte Reihe, sofern falsch:
A/B29: **Zähle weiter von 9 bis 15; sechs, sieben, acht....**	gezählte Reihe, sofern falsch:
A/B30: **Zähle bis 14 und überspringe immer jeweils eine Zahl: zwei, vier, sechs,...**	gezählte Reihe, sofern falsch:
A/B31: **Ich gebe dir ein Bild, das du kurz anschauen sollst** (Ex. zeigt Blatt 2 s) **Wie viele Punkte waren es?** (Antwort 4 und 5 reicht aus) (Bei falscher Zahl > 6 nach einzelnen Würfelbildern fragen!)	Antwort:
A/B32: (Ex. legt 17 Holzwürfel auf den Tisch in eine Reihe mit etwas Abstand zwischen den Würfeln) **Hier siehst du 17 Holzwürfel. Zeige auf die Holzwürfel und zähle sie rückwärts!**	wenn falsch, Fehler?: Zählrichtigung: 0 v. li ---> n. re 0 <----
A/B33: (Ex. legt 20 Würfel in Reihe mit etwas Abstand. Kind darf **nicht** auf Würfel zeigen; evtl. Hand auflegen) **Wie viele Würfel liegen hier?**	wenn falsch, Antwort?
A/B34:**Wie viele Holzstäbe könntest du hier wohl hintereinanderlegen? (**Pappstreifen und 1 Holzstab (5er=gelb) an den Anfang des Streifens auf den Tisch legen!) (r=4 Stk)	0 nur mental 0 zeigt auf Streifen 0 berührt Streifen/Stab 0 legt Stab auf Streifen Bemerkungen:
A/B35:**Du siehst hier einen Zug** (Ex. zeigt Bild) **und ich baue daneben einen 2. Zug mit Holzstäben**.. (Ex: zeigt Bild und legt 1 Stab (6er=dunkelgrün) daneben). **Wie viele Stäbe nebeneinander brauchst du, damit dein Zug so lang wird wie der auf dem Bild?** (r=3 Stk)	0 nur mental 0 zeigt auf Stab / Zug 0 berührt Stab / Zug 0 legt Stab auf Bild und probiert Bemerkungen:

Anlage A3: Eingangsuntersuchung - Aufgabenbeispiele Einzeltest (Form B)




OTZ
A20
B12
B13
OTZ
A24
B14
B15
B16
B17
B18
B19
B20
B21
B22
B23

		Aufgaben Einzeltest: **28**: Zähle bis 20 **29**: Zähle weiter von 9 bis 15 ... **30**: Zähle bis 14,... (in Zweierschritten) **32** Zähle rückwärts (ab 17) **33** Zählen mit den Augen (bis 20)
		
		
		

Anlage A4: Eingangsuntersuchung - Ergebnisse der Einzelaufgaben

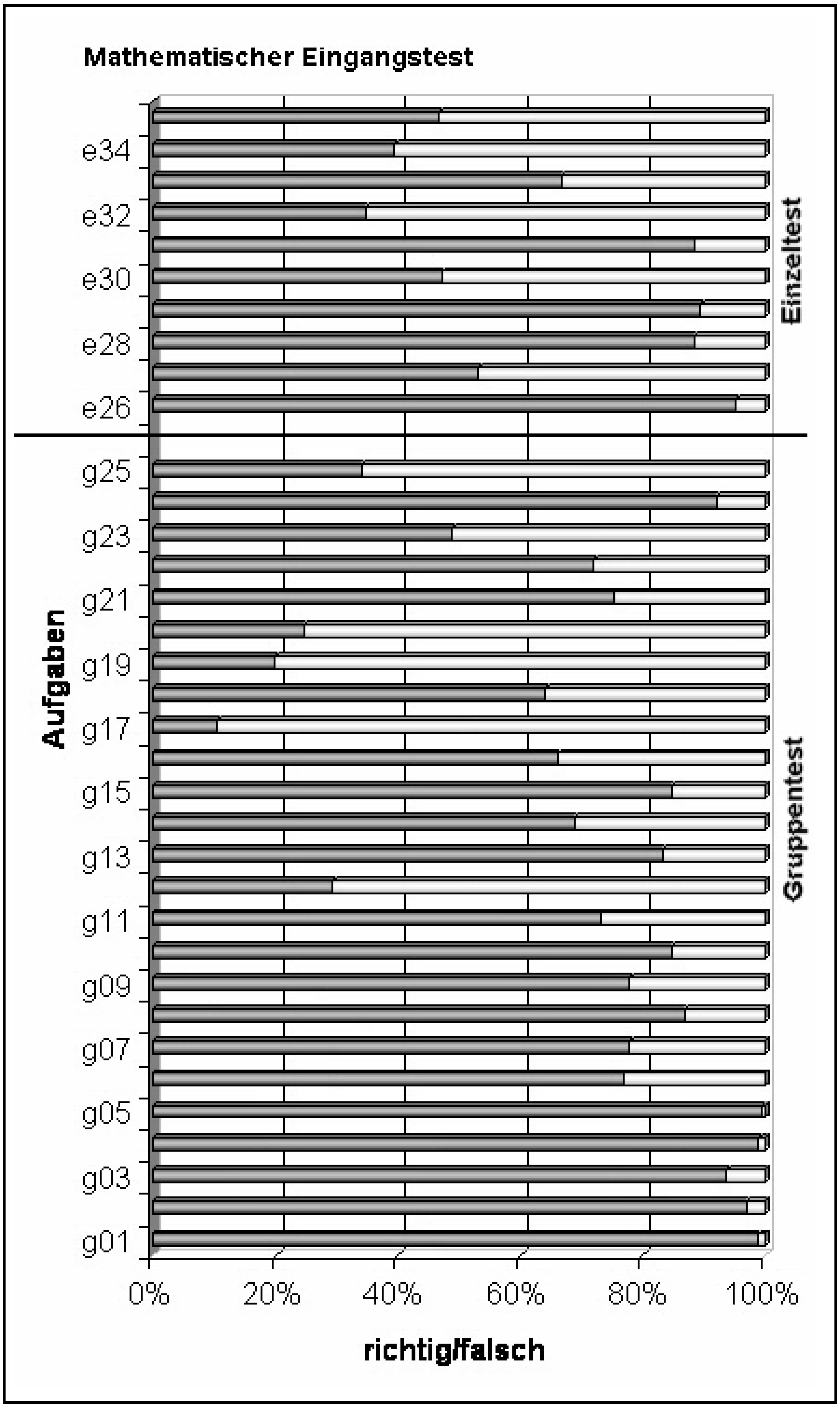


Abb. 7.02: Eingangstest - Ergebnisse der Einzelaufgaben

Anlage A5: Aufgabe G25 - Aufgabengruppen Eingangstest (Korr.)

Korrelationen nach Spearman (N=190)		Zahlenreihe am Lineal	Zwischen-skalierung	Anfang bei 0 oder 1	Fehler bei der Beschr.
Merkmale erkennen ...	K.-koeff.	,283**	*,129*	,306**	,220**
	Sign.	,000	,075	,000	,002
Längen schätzen...	K.-koeff.	*,138*	,250**	,193**	*,119*
	Sign.	,058	,000	,008	,102
Längen vs. Anzahlen...	K.-koeff.	,244**	*,110*	,270**	,171*
	Sign.	,001	,131	,000	,018
Zählen	K.-koeff.	,268**	*,100*	,250**	,215**
	Sign.	,000	,170	,001	,003
alle Aufgaben	K.-koeff.	,313**	,203**	,343**	,249**
	Sign.	,000	,005	,000	,001

Tab. 7.01: Aufgabe G25 - Korrelationen mit dem Eingangstest

Anlage B1: Verlaufsplan Einführungsstunde

Phase / Zeit	Inhalte / Vorgehen	Medien / Organisation
1) **Motivation, Einstieg** 2’	Geschichte v. Hasen und Igel verkürzt	frontal / Sitzkreis Bilder,
2) Ziffernkenntnis 3’	Ziffernkarten auslegen, ordnen, vw und rw zählen	Sitzkreis Ziffernkarten 1..10
3) ordin. Vorstellung vw und rw Zählen 5’	Gehen und zählen (vw / rw) Igel geht 10 Schritte vorwärts (zeigen, chor. zählen) Igel geht 10 Schritte rückwärts (zeigen, chor. zählen)	Sitzkreis Plüschigel Eigene Handlung,
4) Proportionalität von 0 bis 5, vw / rw 5’	Der Igel geht 5 Schritte vw - welche Zahl -warum (Schrittzahl)? Welche Zahl am Startpunkt? Welche Karten kann man dazwischenlegen? Proportionalität herstellen.	Sitzkreis Karte 5 Karte 0 Auswahl Ziffern-Karten
5) Proportionale Veränderungen von 0 bis 5 , vw / rw 5’	Wenn die 5 jetzt hier ist (weiter weg / näher) - wie muss der Igel dann gehen? Gehen, zählen, Karten 1.. 5 legen Proportionalität herstellen	Sitzkreis Karten 0 .. 5 2 Beispiele
6) Proportionalität erkennen und anwenden weiter von 4 bis 8 5’	Der Igel geht bis zur 4 und sitzt dort. Er will nun bis zur 8 weitergehen, wie weit wird er kommen? Schätzen, Zählen, Ziffern legen	Sitzkreis 0 .. 4 aufbauen 5.. 8 legen Ende Sitzkreis
7) Vorbereitung A-Blatt 5’	Der Igel sitzt hier (Igelbild). Welche Zahl ist hier? (0) Er will bis zur 5 gehen (5 schreiben) Schritte einzeichnen	frontal, Tafel Igelbild
8) A-Blatt Proportionalitäten, Zählen, (Ziffern schreiben) 10’	Austeilen - Name eintragen lösen wie Tafelbeispiel, Ziffern an die Schritte freiwillig ganz unten selbst 2 Aufgaben ausdenken Rückseite Igelbild	Stift

Anlage B2: Arbeitsblatt Einführungsstunde

?

0 4

0 8

0 10

0 6

0 5

0 3

0 7

0 5

0 3

0 ....

0 ....

==>

Anlage C1: Reihenfolge der generierten Aufgaben in den Mikrowelten

Die Reihenfolge der generierten Zufallszahlen ist in allen Mikrowelten gleich. Einzig die Vorgabe und die Skalierung (zstrich1/2) variieren.

Zstrich0	Zstrich1	zstrich2
0-------**vorgabe**	0------**10**-------20	0--------------**20**

Es sind nur die Aufgaben 1 bis 93 dargestellt, da der Anteil der Kinder, die weitere Aufgaben bearbeitet haben < 10% ist.

nr	vorgabe	gesucht	nr	vorgabe	gesucht	nr	vorgabe	gesucht
1	6	10	32	6	1	63	3	6
2	2	10	33	10	18	64	4	0
3	16	17	34	5	19	65	8	4
4	15	15	35	10	13	66	19	8
5	8	6	36	13	9	67	5	6
6	4	18	37	5	2	68	15	0
7	11	19	38	13	17	69	3	0
8	12	0	39	16	8	70	18	16
9	12	1	40	0	18	71	7	4
10	3	7	41	16	0	72	8	0
11	19	1	42	2	2	73	13	5
12	10	5	43	7	15	74	9	3
13	14	9	44	16	18	75	0	12
14	12	11	45	16	19	76	5	11
15	19	16	46	8	19	77	19	2
16	1	11	47	1	17	78	4	11
17	15	13	48	15	1	79	0	10
18	14	10	49	15	0	80	1	16
19	19	15	50	10	1	81	3	5
20	1	12	51	17	15	82	2	12
21	9	8	52	3	7	83	13	18
22	6	4	53	12	11	84	12	1
23	12	3	54	13	13	85	1	1
24	6	4	55	14	13	86	12	2
25	19	11	56	6	18	87	2	14
26	7	0	57	6	10	88	18	5
27	15	12	58	4	14	89	9	3
28	8	6	59	11	19	90	12	16
29	7	2	60	6	10	91	5	5
30	14	9	61	4	11	92	19	3
31	9	3	62	12	15	93	2	6
oben weiter!			*oben weiter!*					

Anlage C2: Format der Protokolldateien (.log-Dateien)

Grundaufbau der Datei:

[Allgemeine Daten] [Datensatz 1] ....[Datensatz n]

Allgemeine Daten:

[[Persönliche Daten] [Datumsstempel] [Zeitstempel]]

Persönliche Daten:

[[Name] Alter]

Datumsstempel:

Beginn der Computerarbeit (time Befehl)

Zeitstempel:

Uhrzeit Ende der Computerarbeit (hh:mm:ss)

Beispiel:

```
[[[jan F] 7] [Fri Jan 11 11:17:42 2002] [11:31:50 ]]
```

Datensatz1 ... Datensatz n (Mausstop oder Mausklick links):

Mausstop:

[vorgabe.von vorgabe.bis gesuchtes.x koord.x.aktuell y-Abweichung [Systemzeit] x]

Systemzeit (systime): [Stunde Minute Sekunde Sekunde/100]

Beispiel:

```
[0 6 10 300 4 285 [11 17 43 15] x]
[0 6 10 300 52 -33 [11 17 43 70] x]
```

Mausklick links:

Wie Mausstop aber ohne x-Markierung

Beispiel:

```
[0 6 10 300 266 6 [11 18 20 28]]
[0 6 10 300 292 6 [11 18 23 90]]
```

Anlage C3: Programmtypen und Übersicht der Programme

Es werden hier nur die Programmtypen ausführlich dargestellt, um zu dokumentieren, wie mächtig Python bei der Bearbeitung grosser Dateizahlen ist. Die restlichen, im Überblick dargestellten Programme sind nur Variationen der beiden Grundtypen.

1). Typ prg:

Bearbeiten von Einzeldateien in einem Verzeichnis

```
import os
from math import *
from time import *
from string import *
######################################################################
# prg00.py  ok
#
# txt-Dateien bearbeiten
#
# Dateinamen in dirname1 als Liste auslesen, dann nacheinander
# a l l e  D a t e i e n  im Verzeichnis dirname1 oeffnen
auslesen,bearbeiten
# und  i n   D a t e i e n   nach dirname2 zurückschreiben
#
# Dezimalpunkt durch Komma ersetzen
#
# Beispiel:
# bearbeite(dirlesen())
# kdt 26/12/03
######################################################################

dirname1='d:\\cekatest\\test0\\' #Verzeichnis mit Orginaldateien
dirname2='d:\\cekatest\\test1\\' #Verzeichnis für bearbeitete Dateien

# alle Dateinamen im Verzeichnis dirname lesen
# und als alphabetisch/numerisch sortierte Liste ausgeben
def dirlesen():
    dirliste=os.listdir(dirname1)
    dirliste.sort()
    return dirliste

# dtext in feste Datei d ans Ende schreiben
def dateischreiben(dname,dtext):
    try:
        d2=open(dirname2 + dname,'a')
        d2.write(dtext)
        d2.close()
    except:
        print 'Fehler! Kann Datei nicht schreiben'
        print '     evtl. falsches Datenformat (Liste etc..)'

# Datei dname oeffnen und ausdrucken oder bearbeiten
def dateibearbeiten(dname):
```

```
    #Datei zum Lesen oeffnen
    d1=open(dirname1 + dname)
    #dateilesen Daten-Zeile solange es geht
    zeile=d1.readline()
    while zeile:
        #ab hier Datei bearbeiten z.B. Dez-Punkt durch Komma ersetzen
        zeile=zeile.replace('.',',')
        dateischreiben(dname, zeile)
        zeile=d1.readline()

# Alle Dateien in einem Verzeichnis oeffnen
# weiterbearbeiten und jeweils in neue Datei zurückschreiben
def bearbeite(dliste):
    try:
        # print dliste # Monitorausgabe nur zur Kontrolle
        for x in dliste:
            print x  #Dateiname zur Kontrolle nach stdout schreiben
            dateibearbeiten(x) # Datei oeffnen und intern bearbeiten
    except:
        print 'Fehler, konnte Dateien nicht oeffnen'
        print '     oder falsches Dateiformat (nicht Python) '
```

2). Typ prgv:

Dateien in allen Unterverzeichnissen bearbeiten und schreiben

```
import os
from math import *
from time import *
from string import *

#####################################################################
# prg11v.py ok
#
# Dateien aus Ordnern auslesen, neue Ordner anlegen und bearbeitete
Dateien
# reinkopieren
#
# Beispiel:
# bearbeite(dirlesen())
#
# kdt 02/10/03
#
#####################################################################

dirname1='d:\\cekatest\\test0\\' #Verzeichnis mit Orginaldateien
dirname2='d:\\cekatest\\test1\\' #Verzeichnis für bearbeitete Dateien

# alle Dateinamen im Verzeichnis dirname lesen
# und als alphabetisch/numerisch sortierte Liste ausgeben
def dirlesen():
    dirliste=os.listdir(dirname1)
    dirliste.sort()
    return dirliste
```

```
# dtext in feste Datei d ans Ende schreiben
def dateischreiben(dname,dtext):
    try:
        d2=open(dirname2 + dname,'a')
        d2.write(dtext)
        d2.close()
    except:
        print 'Fehler! Kann Datei nicht schreiben'
        print '     evtl. falsches Datenformat (Liste etc..)'

# Datei dname oeffnen und ausdrucken oder bearbeiten
def dateibearbeiten(vname,dname):
    #Datei zum Lesen oeffnen, Kontrolle ob gefunden
    dname='\\'+ vname + '\\' + dname
    d1=open(dirname1 + dname)
    #Kopfzeile einlesen
    zeile1 = d1.readline()
    dateischreiben(dname, zeile1)
    #naechste zeile
    zeile=d1.readline()
    while zeile:
        zn=zeile.split(',')
        dzeile=(zn[0]+','+zn[1]+','+zn[6]+','+'10\n')
        dateischreiben(dname, dzeile)
        zeile=d1.readline()
    #bis hier dateibearbeiten

# Alle Dateien in einem Verzeichnis oeffnen
# weiterbearbeiten und in neue Datei zurückschreiben
def bearbeite(dliste):
    try:
        # print dliste # Monitorausgabe nur zur Kontrolle
        for x in dliste:
            dirliste=os.listdir(dirname1+x)
            dirliste.sort()
            print x
            os.mkdir(dirname2+x)
            for z in dirliste:
                print '  '+z  #Dateiname nach stdout schreiben
                dateibearbeiten(x,z) # Datei oeffnen und bearbeiten
    except:
        print 'Fehler, konnte Dateien nicht oeffnen'
        print '     oder falsches Dateiformat (nicht Python) '
```

3) Übersicht der Programme (python_prg_ok)

Prg-Name	Typ	Funktion
konvert0.lg	Filter	Orginalprotokolle (Gesamtprotokoll) in Logo durchchecken, evtl. Datei schliessen, Name, etc.. ergänzen, unvollständige Datensätze löschen, Datensätze in Zeilen schreiben.
prg01.py	Filter	Gesamtprotokolle in txt-Format (Python) umwandeln, Nummer für Anonymisierung ergänzen.

prg02.py	Konverter	Quatitative Auswertung der Gesamtprotokolle (Aufgabenzahl, Bearbeitungszeit, Klickzahl, ...) In txt-Datei für Statistik
prg04.py	Konverter	Gesamtprotokolle in Protokolle der Einzelaufgaben aufsplitten, Export nach .xml
prg05.py	Konverter	Gesamtprotokolle in Protokolle der Einzelaufgaben aufsplitten, Format: .txt (Python)
prg05a.py	Konverter	Gesamtprotokolle in Protokolle der Einzelaufgaben aufsplitten, Format: .txt (Python) für zstrich0
prg05bc.py	Konverter	Gesamtprotokolle in Protokolle der Einzelaufgaben aufsplitten, Format: .txt (Python) für zstrich1 und zstrich2
prg06.py	Konverter	Txt-Protokolle (lang) in Logodatei schreiben für grafische Darstellung
prg06k.py	Konverter	Txt-Protokolle (kurz) in Logodatei schreiben für grafische Darstellung
prg07.py	Filter	Txt-Protokolle (lang) bearbeiten und in Logodatei schreiben für grafische Darstellung
prg08.py	Filter	Txt-Protokolle (lang) bearbeiten und als gekürzte Textdatei schreiben, gefunden markieren (zstrich0)
prg08ab.py	Filter	Txt-Protokolle (lang) bearbeiten und als gekürzte Textdatei schreiben, gefunden markieren (zstrich1 und zstrich2)
prg09.py	Filter	Txt-Protokolle (lang) bearbeiten und ls gekürzte Textdatei schreiben, gefunden markieren (zstrich0) auch für Unterverzeichnisse
prg09v.py	Filter	Txt-Protokolle (lang) bearbeiten und ls gekürzte Textdatei schreiben, gefunden markieren (zstrich1 und zstrich2 mit wechselnder Skalierung) auch für Unterverzeichnisse
prg10.py	Konverter	Einzelvariablen aus txt-Dateien (kurz) gesammelt in txt-Datei für Statistikprogramm schreiben.
prg11.py	Filter	txt-Dateien (kurz) weiterbearbeiten
prg11a.py	Filter	txt-Dateien (kurz) weiterbearbeiten, kleine dx löschen
prg11v.py	Filter	txt-Dateien (kurz) weiterbearbeiten in allen Verzeichnissen
prg11av.py	Filter	txt-Dateien (kurz) weiterbearbeiten in allen Verzeichnissen
prg12.py	Filter	txt-Dateien (kurz) weiterbearbeiten, Strategie (xko) in letzte Zeile schreiben (Test)
prg12a.py	Konverter	txt-Dateien (kurz) weiterbearbeiten, Strategie (xko) in letzte Zeile schreiben, dann Strategien sammeln in txt-Datei für Statistikprogramm.(Test)
prg13.py	Filter	txt-Dateien (kurz) weiterbearbeiten, große y-Abweichungen löschen
prg13a.py	Filter	txt-Dateien (kurz) weiterbearbeiten, zielführende Strategie ausfiltern
prg13c.py	Filter	Strategien gesammelt in Statistikdatei schreiben
prg13v.py	Filter	wie 13.py aber für Verzeichnisse
prg13av.py	Filter	wie 13a.py aber für Verzeichnisse
prg13cv.py	Filter	wie 13c.py aber für Verzeichnisse, zstrich0
prg13cvab.py	Filter	wie 13c.py aber für Verzeichnisse, zstrich 1 und zstrich2
prg13k.py	Konverter	Datei mit Strategie als LOGO-Datei schreiben
prg14.py	Konverter	txt-Dateien auswerten (Test)

prg14a.py	Konverter	txt-Dateien auswerten (Test)
prg20.py	Filter	txt-Dateien mit Einzelaufgaben in Vektor der Länge n, dann auswerten, div. Programme
..	..	..
prg35.py	Filter	..
prg40.py	Konverter	Dateien aus allen Ordnern auslesen, auswerten und Variablen gesammelt in eine Datei schreiben, sortiert nach Aufgaben
prg40v.py	Konverter	Dateien aus allen Ordnern auslesen, auswerten und Variablen gesammelt in eine Datei schreiben, sortiert nach Aufgaben
prg41.py	Konverter	Dateien aus allen Ordnern auslesen, auswerten und Variablen gesammelt in eine Datei schreiben, sortiert nach Kindern
prg41v.py	Konverter	Dateien aus allen Ordnern auslesen, auswerten und Variablen gesammelt in eine Datei schreiben, sortiert nach Aufgaben
prg42.py	Konverter	Wie 40.py, weitere statistische Auswertungen
..	..	
prg47.py	Konverter	

Anlage C4: Vergleich Strategien Computerauswertung-Handauswertung

Aufg. 01		
nr	c	h
1	0	2
2	3	3
4	3	2
6	2	2
7	3	0
8	2	2
9	2	2
10	0	0
12	1	1
13	3	2
14	2	2
15	2	2
16	0	0
17	2	2
18	1	1
20	2	2
22	2	2
23	2	2
24	0	0
25	2	2
27	1	0
29	2	0
30	1	1
31	3	3
32	1	1
35	2	2
36	2	0
37	2	2
38	1	1
39	2	2
40	0	0
41	3	3
42	1	0
43	2	2
45	3	3
46	2	2
47	2	2
48	3	1
49	2	2
50	2	1
51	0	2
52	1	1
53	1	0
54	1	1
56	2	2
57	0	0
58	2	3
59	0	0
61	1	1
62	2	2
63	1	0
64	3	3
65	2	0
66	1	0
67	1	0
68	0	0
69	3	3
70	1	1
71	0	0
72	2	2
73	2	0
75	3	3
76	2	2
77	2	0
78	0	0
80	0	0
81	2	2
82	2	0
83	3	3
84	2	2
85	2	2
86	2	2
87	2	2
88	2	2
89	3	3
90	2	2
91	0	0
92	0	3
93	0	2
94	2	2
95	2	2
96	2	2
97	0	0
98	2	2
99	0	0
100	1	1
101	2	2
102	0	3
103	0	0
104	3	3
105	0	2
106	2	2
107	3	3
108	1	1
109	1	0
110	2	2
111	1	0
112	2	2
113	0	0
114	1	1
115	2	2
116	2	2
117	2	2
118	3	2
119	1	1
121	2	2
122	2	2
123	2	2
124	0	2
125	1	1
126	3	3
127	3	3
128	2	0
130	3	3
132	3	3
133	2	0
134	0	0
135	1	0
136	2	2
137	3	3
138	2	2
139	3	3
140	2	0
141	2	2
142	2	2
143	0	0
144	0	0
146	3	2
149	3	3
150	2	0
151	2	2
152	0	0
154	3	3
156	2	2
158	3	3
159	2	2
160	2	2
161	0	0
162	1	2
163	3	3
164	2	3
165	0	2
166	2	2
167	2	0
168	2	2
169	2	0
170	0	1
171	2	2
172	0	2
173	0	2
174	2	2
175	2	0
176	1	0
177	1	0
178	2	0
179	1	0
180	3	3
181	1	0
182	3	3
183	2	1
184	3	3
185	0	0
186	3	3
187	3	3
188	2	0
189	0	0
190	3	0
191	1	0
192	3	3
193	0	0
194	1	0
195	3	3
196	2	2
197	0	0
198	3	3
199	0	0
200	2	0
201	2	2
202	0	0
211	2	0
213	1	0
214	2	2
221	2	0
300	2	2

Aufg. 10

nr	c	h
2	2	2
4	0	0
6	2	2
9	2	2
12	1	0
13	3	2
14	2	2
15	2	2
16	0	0
17	2	0
20	0	0
22	0	0
23	3	3
25	2	2
27	3	3
29	0	0
30	2	2
31	2	2
32	2	2
35	2	2
36	0	0
37	0	0
38	3	3
41	3	3
42	1	1
43	2	2
45	2	0
46	2	0
47	2	3
48	3	2
49	2	0
50	0	0
51	3	3
53	1	0
54	3	3
56	1	0
57	0	0
58	0	0
59	2	2
61	2	0
62	0	0
63	0	0
64	3	3
65	1	1
66	0	2
67	2	2
68	2	0
69	2	2
70	1	2
71	0	0
72	2	0
73	0	2
75	1	0
76	3	3
77	2	2
79	3	3
80	3	3
81	0	0
82	3	3
83	0	0
84	2	2
85	0	0
86	0	0
87	2	2
88	0	0
89	0	0
90	2	2
91	1	0
92	0	0
93	2	2
94	2	2
95	0	0
96	2	2
97	3	3
98	2	2
99	0	0
100	2	0
101	3	0
102	3	3
103	2	2
104	3	3
105	2	0
106	3	0
107	3	3
108	1	1
109	3	3
110	2	2
111	3	3
112	3	3
113	0	0
114	3	3
115	2	2
116	3	3
117	2	2
118	3	3
119	0	0
121	2	2
122	2	0
123	2	2
124	3	2
125	1	0
126	0	0
127	2	2
128	2	2
130	2	2
132	2	0
133	3	3
134	1	0
135	2	2
136	1	0
137	2	2
138	2	2
139	3	3
140	2	2
141	0	2
142	0	0
143	1	0
144	2	2
146	2	2
147	2	2
151	0	0
152	3	3
154	0	0
156	3	3
158	3	3
159	0	2
160	2	2
161	3	2
162	0	2
163	0	0
164	0	0
165	2	2
166	3	3
167	2	2
168	2	2
169	3	0
170	0	0
171	2	2
172	1	1
173	2	2
174	0	0
175	2	0
176	0	0
177	0	0
178	1	1
179	2	0
180	2	2
181	2	0
182	3	3
183	2	0
184	3	3
185	3	2
186	2	2
188	3	3
189	0	0
190	1	0
191	0	0
192	0	2
193	3	3
194	1	2
195	3	3
196	0	0
197	3	3
198	2	2
199	3	3
200	3	2
201	3	3
202	3	3
211	2	0
213	0	0
214	2	2
300	3	3

Aufg. 12		
nr	c	h
2	3	3
6	3	1
9	3	3
12	3	3
13	3	1
14	3	3
15	2	0
16	3	0
17	0	0
20	3	3
22	3	3
23	3	3
25	0	0
27	3	3
30	3	1
31	0	0
32	3	0
35	0	0
36	3	3
37	3	3
38	0	0
41	3	3
42	3	3
43	3	3
45	3	1
46	3	1
47	3	3
48	0	0
49	3	1
50	3	3
51	2	0
52	0	0
54	3	3
56	0	0
57	0	0
58	0	0
59	3	1
61	0	0
62	3	1
63	0	3
64	0	0
65	0	0
66	0	0
67	0	1
68	0	1
69	3	0
70	2	0
72	3	3
73	3	1
75	2	1
76	0	0
77	3	3
79	3	3
80	3	3
81	3	3
82	0	0
83	3	1
84	3	3
85	0	1
86	0	0
87	3	1
88	0	0
89	3	0
90	3	1
91	3	1
92	0	0
93	3	3
94	0	1
95	3	3
96	0	0
97	3	3
98	0	0
99	3	3
100	3	3
101	0	0
102	3	3
103	3	3
104	3	1
105	3	3
106	3	3
107	3	3
108	0	0
109	3	3
110	0	1
111	3	1
112	3	3
113	2	2
114	3	3
115	3	1
116	2	2
117	3	3
118	0	0
119	0	0
121	3	1
122	2	2
123	3	1
124	2	2
125	1	1
126	3	3
127	3	3
128	3	3
130	2	0
132	3	3
133	0	2
134	3	1
135	3	3
136	2	0
137	0	0
138	3	1
139	3	1
140	3	3
141	3	1
142	0	0
143	3	0
144	3	2
146	2	2
149	3	3
151	0	0
152	3	1
153	3	3
156	3	3
158	3	1
159	0	0
160	1	0
161	3	0
162	3	0
163	0	0
164	2	0
165	3	3
166	3	3
167	3	3
168	0	0
169	0	0
170	0	0
171	3	1
172	3	1
173	0	0
174	3	3
175	3	3
176	0	0
177	3	3
178	0	0
179	0	0
180	0	0
181	0	0
182	3	0
183	3	3
184	3	3
185	0	0
186	3	3
188	3	3
189	0	0
190	3	0
191	0	0
192	0	0
193	3	3
194	1	0
195	0	0
196	0	0
197	3	1
198	3	3
199	3	3
200	0	0
201	3	3
202	0	0
211	0	0
213	3	3
214	0	0
300	0	0

Aufg. 22		
nr	c	h
2	3	3
6	1	1
9	3	3
14	0	0
15	2	2
22	2	2
23	2	2
25	2	2
27	0	0
30	3	3
35	0	1
37	3	3
38	3	3
45	3	3
46	3	3
47	0	0
49	0	0
50	3	1
51	0	0
54	0	0
56	0	0
57	0	0
58	0	0
59	2	2
62	3	3
63	0	0
65	0	0
66	1	0
67	0	0
68	0	0
70	3	3
72	3	3
73	3	3
75	2	0
77	3	0
79	3	3
80	3	0
83	0	0
84	3	0
87	0	0
88	3	0
89	3	0
90	3	0
92	0	0
93	0	0
94	3	1
95	0	0
96	0	0
97	3	3
98	0	0
99	3	3
100	3	1
101	3	3
102	0	0
103	3	3
104	3	3
105	3	3
106	3	0
107	0	0
108	0	1
109	0	0
110	0	0
111	0	0
112	2	2
113	3	3
114	0	0
115	2	2
116	3	0
117	3	1
118	3	0
119	0	0
121	0	0
122	3	0
123	0	0
124	3	3
126	3	3
127	2	2
128	0	2
130	0	0
132	3	0
133	2	2
135	2	0
137	2	0
138	3	3
139	3	0
140	3	3
141	3	1
143	3	3
146	2	2
149	3	3
151	2	0
152	3	3
154	3	3
156	3	3
158	3	3
161	0	0
162	3	2
165	3	0
166	3	3
168	2	0
170	3	3
172	0	0
173	0	0
174	2	2
176	3	3
178	0	0
179	0	0
180	0	0
181	2	0
182	0	0
183	0	0
184	3	3
185	3	3
186	0	0
188	3	3
190	0	0
191	3	2
192	1	0
193	3	3
195	2	2
196	0	0
197	3	2
198	3	3
199	0	2
201	3	3
202	0	0
211	3	0
213	3	3
214	2	2
300	3	3

Erklärung:

nr : Proband-Nr.
c : Computerauswertung (Beispiele siehe Tab. 3.11)
h : Handauswertung (kurze Protokolle; vgl. Abb. 3.14)

Strategien:

0 : Keine Strategie erkannt
1 : Zählstrategie ab Null
2 : Zählstrategie ab Vorgabezahl
3 : Direkt bzw. operative Strategie

Anlage D1: Expertenstrategien (n=34)

Aufg. Nr.	Umgebung		Strategien (Anzahl)			Strategien (%)		
	Vorgabe	gesucht	zählen	operativ	direkt	zählen	operativ	direkt
1	6	10	19	15	0	55,9	44,1	0
2	2	10	34	0	0	100,0	0	0
3	16	17	34	0	0	100,0	0	0
4	15	15	0	0	34	0	0	100,0
5	8	6	32	2	0	94,1	5,9	0
6	4	18	5	29	0	14,7	85,3	0
7	11	19	15	19	0	44,1	55,9	0
8	12	0	0	0	34	0	0	100,0
9	12	1	34	0	0	100,0	0	0
10	3	7	6	28	0	17,6	82,4	0
11	19	1	34	0	0	100,0	0	0
12	10	5	0	34	0	0	100,0	0
13	14	9	16	16	0	50,0	50,0	0
14	12	11	34	0	0	100,0	0	0
15	19	16	31	0	0	100,0	0	0
16	1	11	27	4	0	87,1	12,9	0
17	15	13	34	0	0	100,0	0	0
18	14	10	20	8	0	71,4	28,6	0
19	19	15	24	4	0	85,7	14,3	0
20	1	12	24	5	0	82,8	17,2	0
21	9	8	34	0	0	100,0	0	0
22	6	4	18	15	0	54,5	45,5	0
23	12	3	8	25	0	24,2	75,8	0
24	6	4	18	10	0	64,3	35,7	0
25	19	11	18	14	0	56,3	43,8	0
26	7	0	0	0	34	0	0	100,0
27	15	12	27	3	0	90,0	10,0	0
28	8	6	29	2	0	93,5	6,5	0
29	7	2	28	3	0	90,3	9,7	0
30	14	9	29	5	0	85,3	14,7	0
31	9	3	12	20	0	37,5	62,5	0
32	6	1	1	0	32	3,0	0	97,0
33	10	18	14	20	0	41,2	58,8	0
34	5	19	1	31	0	3,1	96,9	0
35	10	13	31	0	0	100,0	0	0
36	13	9	30	0	0	100,0	0	0

Expertenstrategien (prozentuale Verteilung):

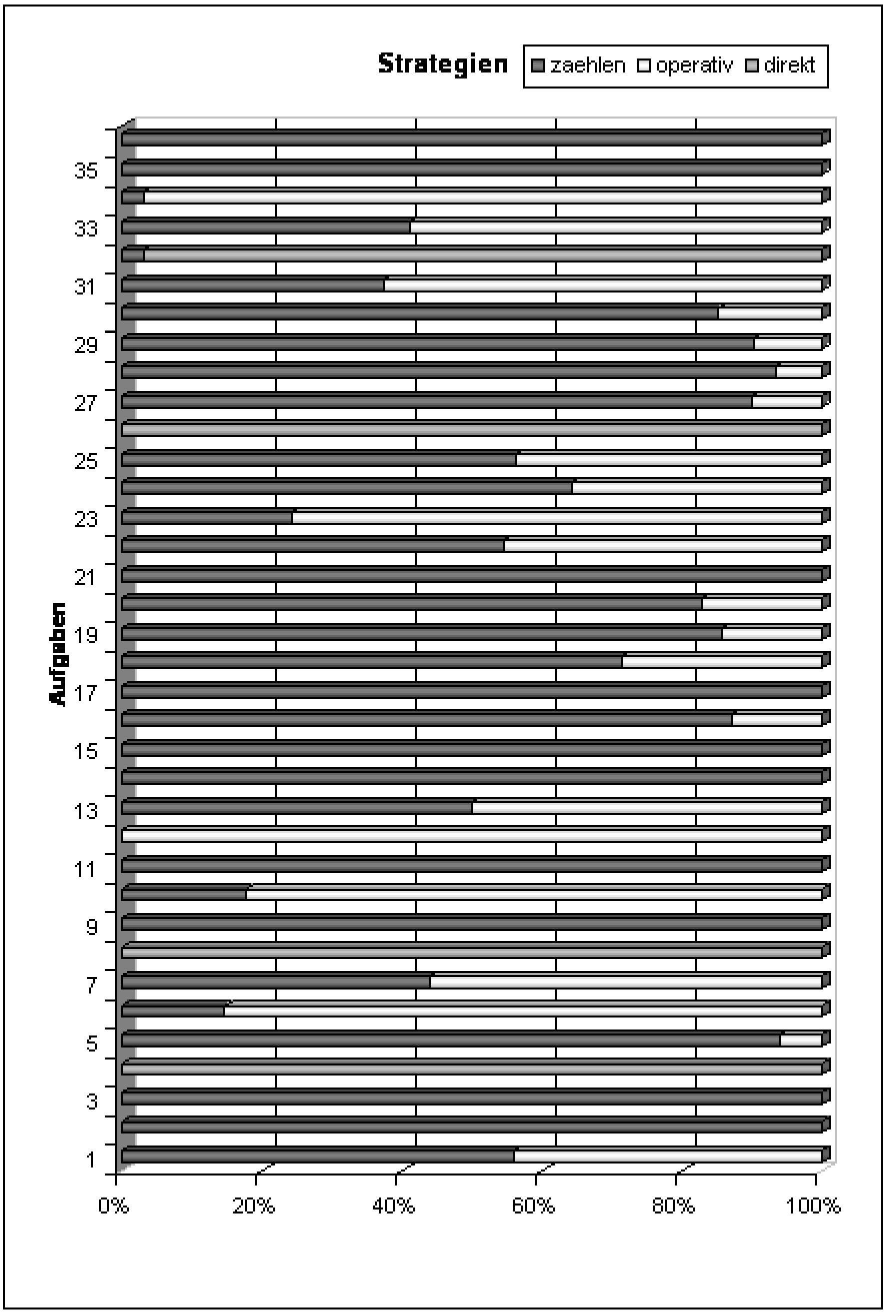


Abb. 7.03: Expertenstrategien (Aufg. 1 .. 36)

Expertenstrategien (zählen, operativ, direkt) im Zusammenhang:

Die Expertenstrategien werden hier kurz präsentiert, da sie mit der eigentlichen Untersuchung in der Grundschulpopulation direkt nichts zu tun haben. Für die folgenden grafischen Darstellungen wurden die Näherungsmaße berechnet (zum Verfahren vgl. 4.1.2) und dann in einen 3d-Plot mit Maple (textplot3d) konvertiert.

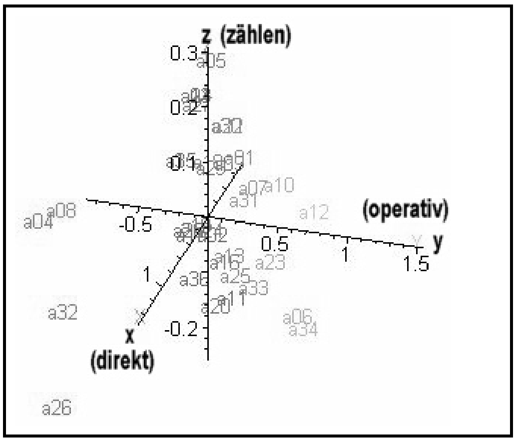


Abb. 7.04: Expertenstrategien - 3dplot

Der Plot kann interaktiv so manipuliert werden, dass man nur die einzelnen Ebenen sieht:

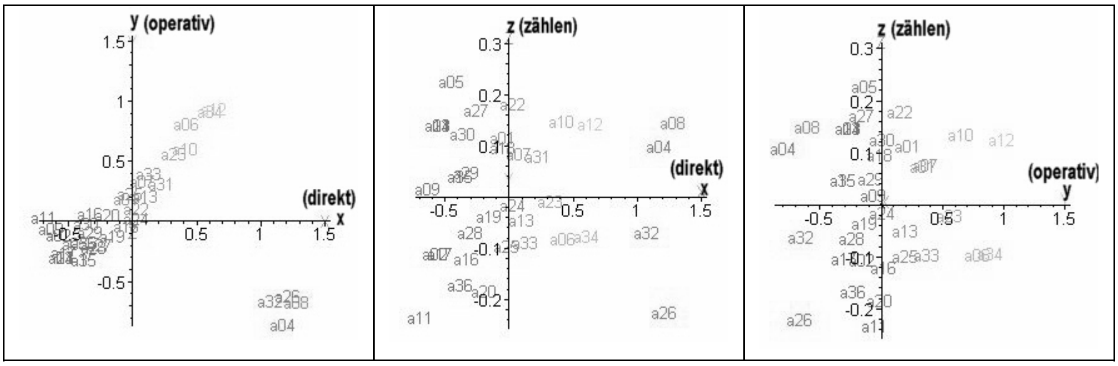


Abb. 7.05: Expertenstrategien - Projektionen 3dplot

Wie im Blockdiagramm schon ersichtlich ist, bilden die Aufgaben 04, 08, 26 und 32 sowie die restlichen Aufgaben je einen Cluster (vgl. Abb 7.03 und Abb. 7.04 Ebene XY, Ebene XZ).

Anlage D2: Auswertung Zstrich0: Aufgaben 1..99 mit Strategien

Die Auswertung der Kurzprotokolle nach den verschiedenen Strategien wird ausführlich in Kapitel 3 beschrieben.

Es werden folgende Strategien unterschieden:

Strategie 0: keine Strategie erkennbar

Strategie 1: Suche ab 0 (Zählstrategie)

Strategie 2: Suche ab der Vorgabezahl

Strategie 3: Suche direkt

Vorgabezahl und gesuchte Zahl zu den jeweiligen Aufgaben siehe Anlage C1.

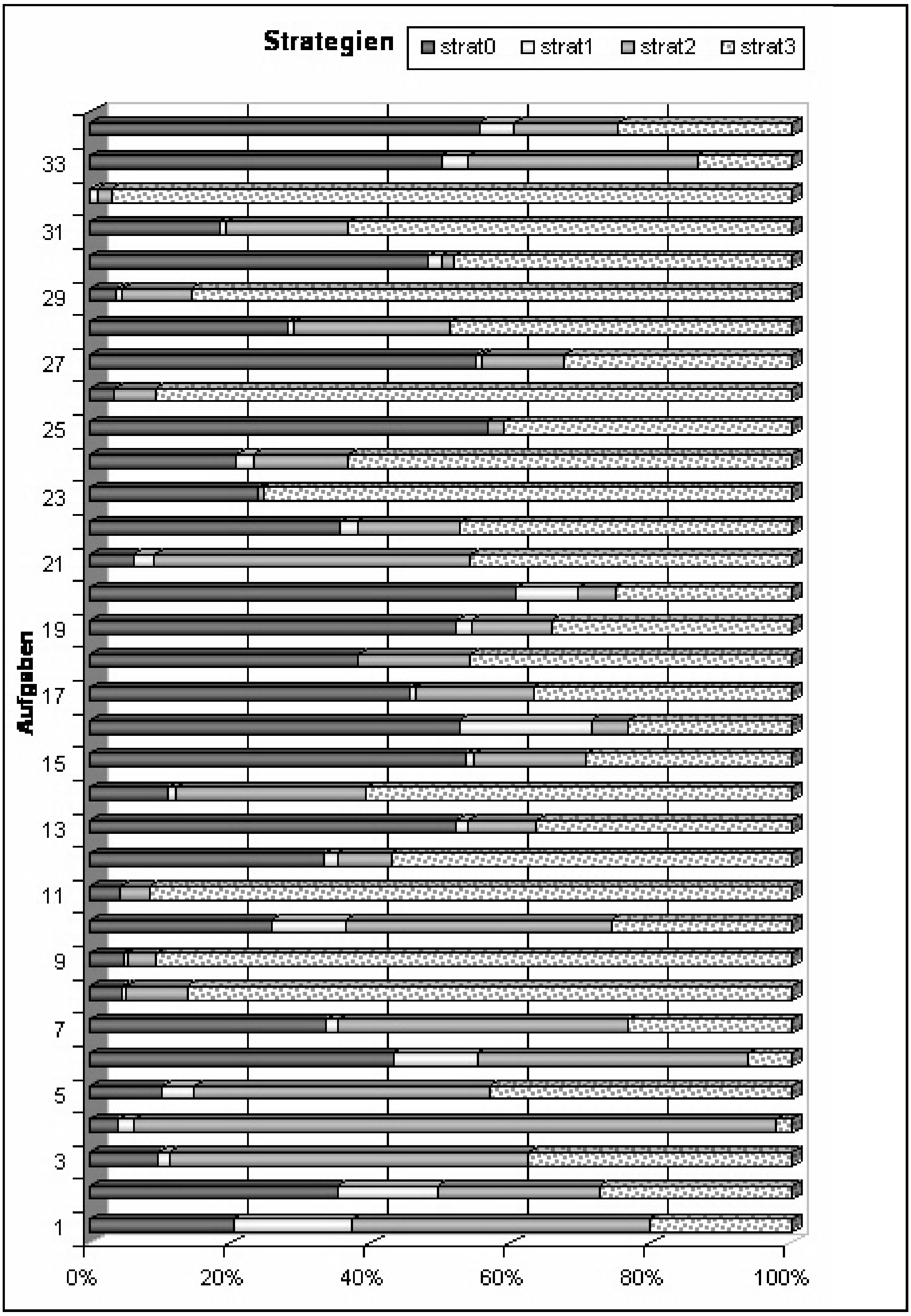


Abb. 7.06: Zstrich0: Strategien - Aufg 1..34

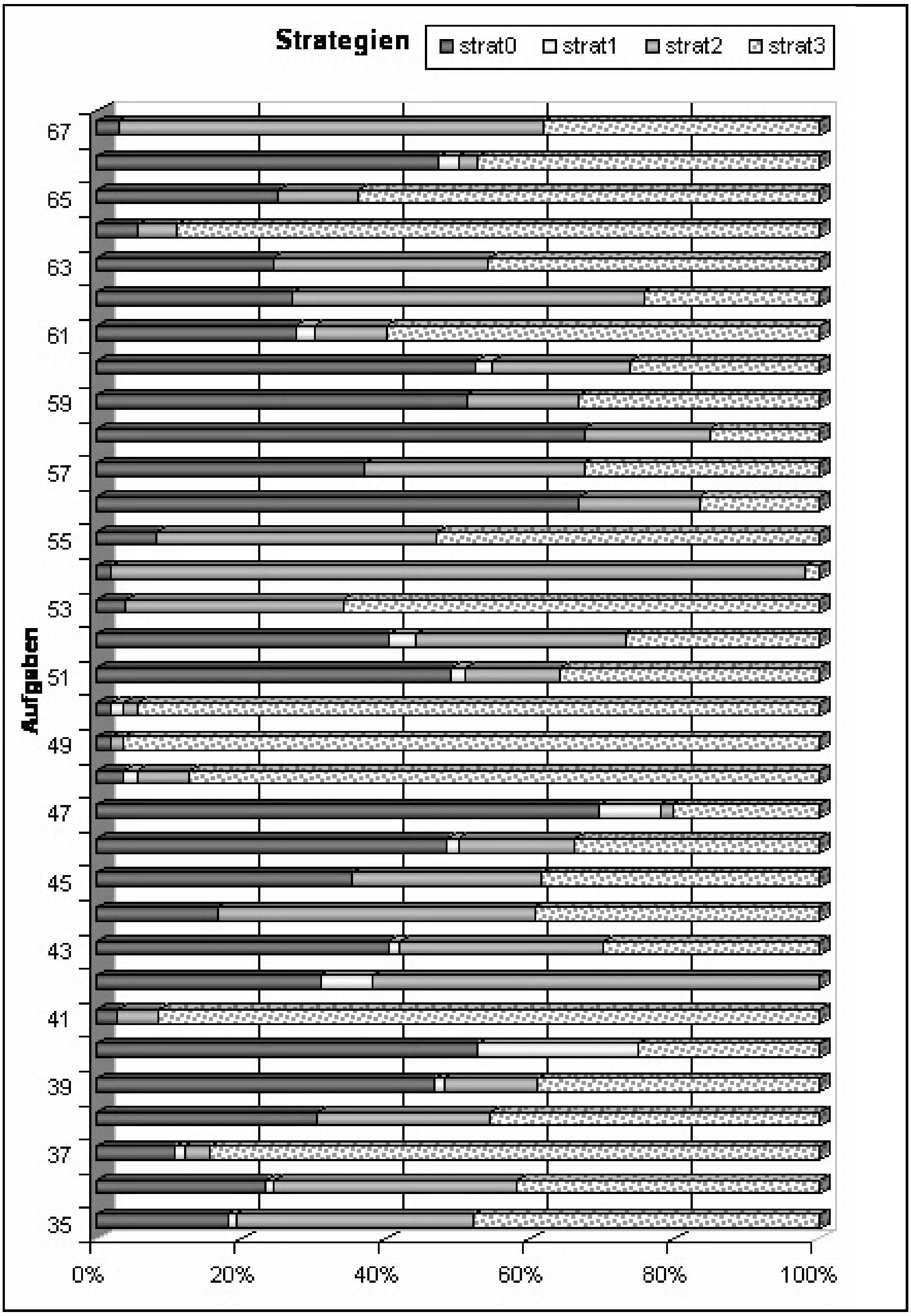


Abb. 7.07: Zstrich0: Strategien - Aufg 35..67

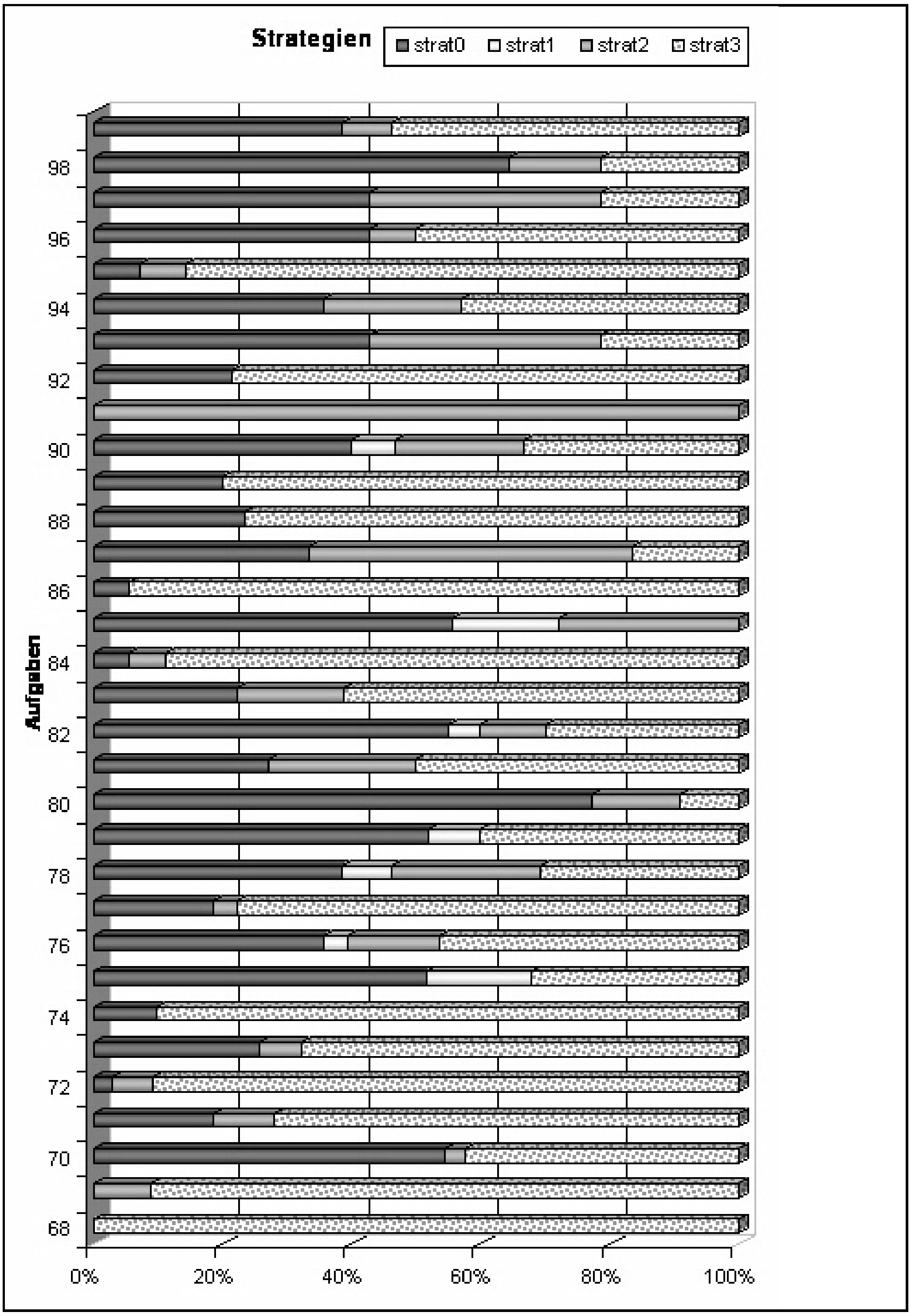


Abb. 7.08: Zstrich0: Strategien - Aufg 68..99

Stichwortverzeichnis

Lebenslauf:	**Dieter Klaudt**
Geboren:	10. Januar 1954 in Ilshofen (Krs. Schwäbisch Hall)
Schulen:	1960-1964: Grundschule in Wolpertshausen 1964-1972: Gymnasium bei St. Michael in Schwäbisch Hall
Interim:	1972-1974: zwei Jahre bei der Bundeswehr 1974-März 1975: verschiedene Berufspraktika zur Überbrückung der Zeit bis Studienbeginn
Studium und Referendariat	Sommersemester 1975-Wintersemester 1978: Pädagogische Hochschule Schwäbisch Gmünd - Fächer: Sport, Mathematik, Theologie (ev.) mit Stufenschwerpunkt Grundschule Mai 1978: 1. Dienstprüfung für das Lehramt GHS Dezember 1979: 2. Dienstprüfung für das Lehramt GHS
Schuldienst:	Juli 1978-Juni 1980: Lehrer i. A. an der Hauptschule Frankenhardt Juli 1980-Juni 1986: Lehrer GHS an der Leonhard Sachs Schule in Crailsheim Juli 1986-Juli 1993: Lehrer GHS an der Nachbarschaftsschule Berglen in Oppelsbohm
Weiterer Werdegang:	November 1991: Erweiterungsprüfung Informatik an der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg März 1992-Juli 1994: Diplomstudium Erziehungswissenschaft (Schulpädagogik) an der PH Ludwigsburg 02. Dezember 2005: Abschluss der Promotion
Hochschuldienst:	seit August 1993: Fachschulrat am Institut für Mathematik und Informatik der PH Ludwigsburg September 1998: Ernennung zum Studienrat a.e.H. seit Januar 2003: Akademischer Oberrat
Projekte und Forschung:	Mitglied der GDM und GI seit 1995: Adaption und Betreuung MSWLogo deutsche Version. 1998-2003: Teilprojekt 2.1 - Virtuelle Seminare zu Mathematik und Informatik im Projekt Virtualisierung im Bildungsbereich der Virtuellen Hochschule Baden-Württemberg. 2001-2005: Dissertationsprojekt: Zahlvorstellung und Operieren am mentalen Zahlenstrahl - eine Untersuchung im mathematischen Anfangsunterricht zu computergestützten Eigenkonstruktionen mit Hilfe einer LOGO-Umgebung (Untersuchung in 12 Schulen mit ca. 200 Kindern).